

Experimentálna Analýza Napätí 2007

IN WHAT DIRECTION WE SHIFT CURRENT KNOWLEDGE IN PRACTICAL APPLICATION OF PHOTOSTRESS METHOD

AKÝM SMEROM POSÚVAME SÚČASNE POZNATKY V PRAKTICKOM UPLATNENÍ METÓDY PHOTOSTRESS

František Trebuňa¹, Miroslav Pástor, Zuzana Bakšiová, Anna Kostelníková,
Peter Frankovský

Abstract: In the paper we give information about new knowledge resulting from application of PhotoStress method by using systems M030, M040, LF/Z-. The aim is to unify present and also new developed methods of separation in conditions of our department in correspondence with information which we had published on last conference EAN 2006 in contribution [5].

Keywords: PhotoStress, separation of principal stresses, method of research.

1. Úvod

V experimentálnej analýze napätosti, realizovanej našim pracoviskom, je snaha pri riešení výskumných projektov a projektov pre prax využívať metódu PhotoStress. PhotoStress je dnes jednou z významných experimentálnych metód, ktorá slúži k určovaniu napätia v skutočných súčiastkach. Použitie tejto metódy v technickej praxi je výhodné najmä pri úlohách, kde sú okrajové podmienky pomerne problematické z hľadiska ich definovania. Metóda poskytuje vizuálne jasný obraz o priebehu napätia po celom povrchu skúšaného objektu. Táto vlastnosť ju radí na popredné miesta pred iné metódy, ktoré umožňujú určiť napätia len v niektorých vopred stanovených bodoch.

2. Opis fotoelasticimetrických zariadení a ich príslušenstva pre metódu PhotoStress

Odrazový polariskop M 030 je prvý optický prístroj na experimentálne vyšetovanie vnútorných silových veličín metódou PhotoStress prostredníctvom naaplikovaného fotoelastického povrstvenia. Opticky citlivé povrstvenie sa aplikuje priamo na skúšaný objekt. Odrazový polariskop M 030 (obr.1) sa skladá zo zariadenia pre automatické snímanie údajov, kompenzátora s nulovou rovnováhou a zariadenia pre meranie pri šikmom osvetlení nami skúšaného objektu. Pri dynamickom meraní sa používa stroboskopický svetelný zdroj model 134 strednej intenzity pre univerzálne aplikácie a model 234 s úzkym zväzkom lúčov vysokej intenzity, určený pre meranie na pohybujúcom sa objekte.

Odrazový polariskop M 040 (obr.2) je presný optický prístroj určený pre experimentálnu analýzu napätí metódou PhotoStress. Vďaka robustnej konštrukcii, kompaktnosti a ľahkej ovládateľnosti je prístroj schopný vykonávať presné merania nielen v laboratórnych

¹ Dr.h.c. mult. prof. Ing. František Trebuňa, CSc., TU v Košiciach, SjF, KAMaM, Letná 9, 042 00 Košice, tel.: +421556022462, frantisek.trebuna@tuke.sk, Ing. Miroslav Pástor, 0556022465, miroslav.pastor@tuke.sk, Ing. Zuzana Bakšiová, 0556022455, zuzana.baksiova@tuke.sk, Ing. Anna Kostelníková, 055602455, anna.kostelnikova@tuke.sk, Ing. Peter Frankovský, 055602455, peter.frankovsky@tuke.sk

podmienkach, ale aj v teréne. Do základného vybavenia polariskopu patrí mikroskop pre zväčšovanie obrazu izoklinných a izochromatických pruhov, fotoaparát pre ich registráciu, kompenzátor pre nulovú rovnováhu a vyhodnocovacia jednotka.

Najnovší odrazový polariskop určený pre túto experimentálnu oblasť je polariskop LF/Z-2 (obr.3). Využíva princíp teórie PhotoStress. Je dokonalejší ako systémy M 030 a M 040. Umožňuje určenie smerov hlavných deformácií a ich veľkosti pomocou kompenzátora Model 832. Výpočet napätí a deformácií sa realizuje prostredníctvom programu PSCalc™. Tento program sa využíva tiež pri separácii hlavných napätí a deformácií metódou vytvárania drážky (metóda *Slitting*). Umožňuje určiť hlavné pomerné deformácie v smere kolmom na smer drážky, ak je drážka vyfrézovaná v smere hlavných pomerných deformácií. Laser ako súčasť prístroja umožňuje presne určiť smery hlavných napätí resp. deformácií.

Odrazový polariskop LF/Z-2 má jednoduché ovládanie a manipuláciu, je spojený s digitálnou videokamerou, ktorá umožňuje znázorniť rozloženie farebných pruhov na monitore počítača. Laserové osvetlenie umožňuje zobrazíť smery hlavných napätí. Softvér PSCalc™ umožňuje separovať hodnoty jednotlivých hlavných napätí predovšetkým novým postupom nazývaným *Slitting*.



Obr.1 Polariskop M 030



Obr.2 Polariskop M 040



Obr.3 Odrazový polariskop LF/Z-2

3. Separácia hlavných deformácií resp. napätí

Ak experimentom získame polia izochróm a izoklín, potom pre určenie zložiek poľa deformácií, resp. napätí, môžeme využiť metódy používané v klasickej fotoelasticite menovite metódu separácie hlavných napätí pozdĺž izostatickej čiary, metódu rozdielov šmykových napätí, výpočet hlavných napätí riešením Laplaceovej diferenciálnej rovnice rovnováhy a ďalšie. Treba však poznamenať, že tieto metódy už nie sú tak efektívne v metóde odrazovej fotoelascimetrie.

Výsledkom vykonaných experimentov sú funkcie

$$\frac{\varepsilon_1}{f} - \frac{\varepsilon_2}{f} = N \quad \text{- rozdiel hlavných deformácií.} \quad (1)$$

Ak zavedieme funkciu

$$e = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad (2)$$

možno zložky tenzora deformácie vyjadriť vzťahmi

$$\frac{\varepsilon_x}{f} = \frac{e}{f} + \frac{N}{2} \cos 2\alpha_n, \quad \frac{\varepsilon_y}{f} = \frac{e}{f} - \frac{N}{2} \cos 2\alpha_n, \quad \frac{\gamma_{xy}}{f} = N \sin 2\alpha_n. \quad (3)$$

α_n - uhol medzi hlavnou deformáciou a zvoleným smerom x .

Pre ich určenie je potrebná znalosť funkcie e/f vo vyšetrovanej oblasti.

V určitých charakteristických bodoch vyšetrovanej oblasti možno zložky tenzora deformácií získať priamo z poľa izochróm a izoklín bez ďalších dodatočných výpočtov. K takýmto bodom patria hraničné body vyšetrovanej oblasti. Existujú dva druhy takýchto bodov:

- Hraničné body I. druhu – hranica vyšetrovanej oblasti je identická s hranicou súčiastky, na ktorej je dané vonkajšie zaťaženie, prípadne je hranica nezaťažená.
- Hraničné body II. druhu – povrstvenie je naaplikované na časti skúmanej konštrukcie, teda hranice povrstvenia a súčiastky nie sú identické a nie sú známe zaťaženia v bodoch hranice povrstvenia.

Určenie zložiek tenzora deformácií v hraničných bodoch je technicky mimoriadne dôležitým prípadom, a preto sa v literatúre uvádza ako prvá etapa pre určenie rozloženia deformácií v celej vyšetrovanej oblasti.

Donedávna v transmisnej fotoelascimetrii bola Laplaceova diferenciálna rovnica riešená predovšetkým numerickými metódami.

Pre určenie súčtu hlavných pomerných deformácií využijeme rovnicu kompatibility. Po dosadení rovníc rovnováhy v zložkách deformácií dostaneme

$$\Delta\left(\frac{e}{f}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{e}{f}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{e}{f}\right) = 0. \quad (4)$$

Pri známych hodnotách určených pre povrstvenú oblasť na základe experimentu možno určiť hraničné hodnoty hlavných deformácií $(e/f)_b$ a následne vyriešiť rovnicu (4) vo vyšetrovanej oblasti. Riešenie sa najčastejšie vykonáva diferenčnou metódou prostredníctvom diskretizácie vyšetrovanej oblasti sieťou bodov, pričom vo väčšine prípadov sa volí pravouhlá štvorcová sieť. Konštrukcia siete v oblasti musí byť urobená tak, aby sa jej kontúry čo najlepšie približovali k hranici skúmanej oblasti. Hraničné body siete môžu byť ako z vonkajšej tak aj z vnútornej strany hranice.

Presnosť riešenia diferenčnou metódou možno zvýšiť hustotou použitej mriežky. Presnosť riešenia diferenčnej metódy je úmerná druhej mocnine rozmeru zvolenej štvorcovej siete. Ak presnosť získaných výsledkov nie je postačujúca, treba použiť druhú etapu riešenia, ktorá spočíva v zahustení siete. Vhodným spôsobom je použitie siete trojuholníkového alebo iného tvaru.

Ďalšou metódou, ktorej využite vychádza z transmisnej fotoelascimetrie, je separácia deformácií pozdĺž ľubovoľnej priamky. Využíva sa tu v podstate rozklad izochróm a izoklín [2]. Po zodpovedajúcich transformáciách rovníc rovnováhy možno tieto vyjadriť v tvare

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e}{f}\right) &= \frac{1-\mu}{1+\mu} \left[N \left(\frac{\partial \alpha_n}{\partial x} \sin 2\alpha_n - \frac{\partial \alpha_n}{\partial y} \cos 2\alpha_n \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N}{\partial x} \cos 2\alpha_n + \frac{\partial N}{\partial y} \sin 2\alpha_n \right) \right], \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e}{f}\right) &= \frac{1-\mu}{1+\mu} \left[N \left(-\frac{\partial \alpha_n}{\partial x} \cos 2\alpha_n - \frac{\partial \alpha_n}{\partial y} \sin 2\alpha_n \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N}{\partial x} \sin 2\alpha_n - \frac{\partial N}{\partial y} \cos 2\alpha_n \right) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Ak využijeme smerovú deriváciu [3], možno vyjadriť deriváciu hľadanej funkcie (e/f) pozdĺž priamky s zvierajúcej uhol ψ od osi x v tvare

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{e}{f}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e}{f}\right) \cos \psi + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e}{f}\right) \sin \psi. \quad (6)$$

Po dosadení vzťahov (5) do (6) dostaneme diferenciálnu rovnicu umožňujúcu určenie funkcie (e/f) v bodoch zvolenej priamky s

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{e}{f} \right) = \frac{1-\mu}{1+\mu} \left[\left(N \frac{\partial \alpha_n}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\partial y} \right) \sin(2\alpha_n - \psi) - \left(N \frac{\partial \alpha_n}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\partial x} \right) \cos(2\alpha_n - \psi) \right]. \quad (7)$$

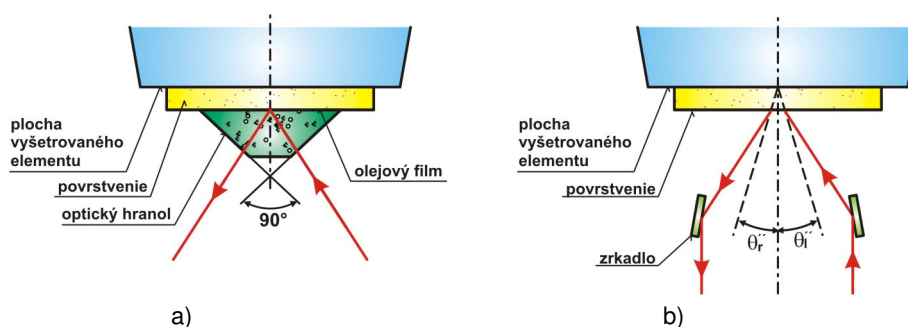
Na pravej strane rovnice (7) sú hodnoty funkcie N a α_n určené priamo z experimentu, hoci ich derivácie $\partial N/\partial x$, $\partial N/\partial y$, $\partial \alpha_n/\partial x$, $\partial \alpha_n/\partial y$ určíme prostredníctvom grafickej derivácie plôch $N(x,y)$ a $\alpha_n(x,y)$ v rezoch s rovinami $y = \text{konšt.}$, $x = \text{konšt.}$ pre zadané body priamky s .

Z fotoelastických efektov v povrstvení môžeme zistiť smery hlavných pomerných deformácií a hlavných normálových napätí v ľubovoľnom mieste modelu. Veľkosti a znamienka pomerných deformácií a napätí môžeme zistiť priamo na okrajoch modelu. V ostatných častiach modelu poznáme iba rozdiely hlavných pomerných deformácií a hlavných normálových napätí. Hlavné napätia σ_1 , σ_2 alebo napätia σ_x , σ_y pozdĺž zvolených súradnicových osí x,y môžeme vypočítať pomocou metód separácií napätí alebo použitím pomocných experimentálnych metód. Pre praktické účely potrebujeme poznať hodnoty týchto parametrov: izostatické čiary, priebeh šmykových napätí, priebeh normálových napätí σ_x , σ_y , resp. priebeh hlavných normálových napätí σ_1 , σ_2 . Postup získavania uvedených údajov môže byť z poľa izostatických čiar ktorých postup zostrojovania je známy z klasickej fotoelasticimetrie. Separáciu hlavných normálových napätí potom možno vykonať pozdĺž izostatickej čiary resp. metódou rozdielu šmykových napätí.

V predchádzajúcej časti boli spomenuté metódy separácie zložiek deformácií a napätí na základe rovníc matematickej teórie pružnosti, vrátane použitia fyzikálnych závislostí medzi zložkami polí deformácií, resp. napätí. Obmedzenia, ktoré neumožňujú riešiť geometricky zložitejšie prvky, ale aj ťažkosti v matematickom spracovaní viedli k rozšíreniu metód, ktorými len na základe experimentálne určených údajov možno dospieť k dostatočne spoľahlivým údajom o separovaných zložkách. Medzi takéto metódy patria:

- metóda šikmého osvetlenia,
- metóda separácie s využitím špeciálnych tenzometrov,
- metóda drážky vytvorenej v smere hlavných pomerných deformácií alebo hlavných normálových napätí,
- metóda založená na meraní zmeny hrúbky fotoelastického povrstvenia.

Jednou z nich veľmi často používanou v metóde opticky citlivých povrstvení je technika šikmého osvetlenia. Môže byť realizovaná pomocou prizmy (optického hranola) s 90° uhlom umiestnenej na povrstvení pomocou olejového filmu (obr.4a). V takom prípade uhol dopadu osvetlenia povrstvenia má hodnotu $\theta_i = 45^\circ$.



Obr. 4. Schéma techniky šikmého osvetlenia. a) použitím optického hranola; b) použitím zrkadiel

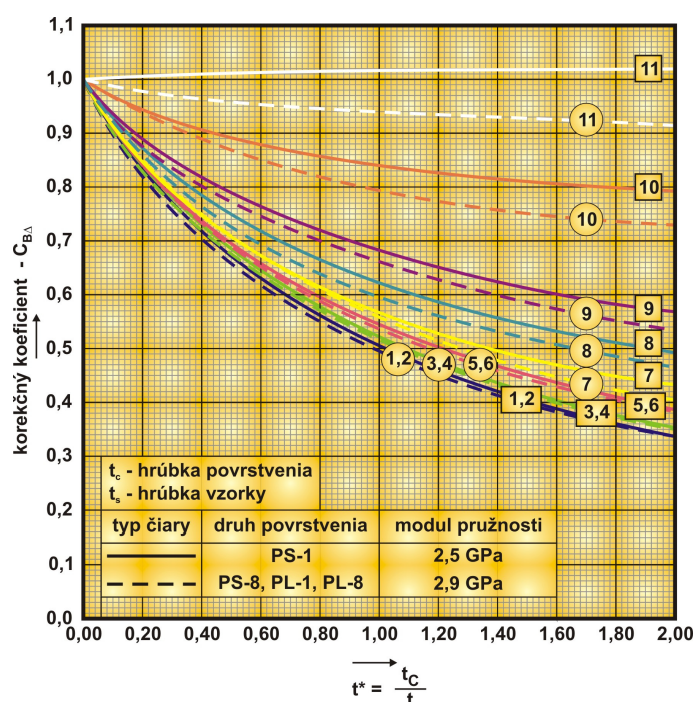
Existujú však zariadenia, ktoré umožňujú nastavenie uhla dopadajúceho lúča a odrazeného lúča pomocou zrkadiel (obr.4b).

Využitie šikmého osvetlenia pri kruhovo polarizovanom svetle poskytuje pole izochróm rozdielne od poľa izochróm získaného pri kolmom osvetlení. Výsledky z tohto merania poskytujú dodatkové informácie, ktoré umožnia spolu s predchádzajúcimi informáciami vykonať separáciu zložiek deformácií.

Metóda šikmého osvetlenia môže byť v rovinách hlavných smerov ale i v ľubovoľných rovinách, dokonca i s využitím nesymetrického šikmého osvetlenia.

Separácia hlavných pomerných deformácií resp. hlavných napätí môže byť realizovaná i prostredníctvom separačných tenzometrov. Hoci odporový tenzometer neponúka všemocnú alternatívu v metóde PhotoStress v oblasti úplného určenia napät'ových polí, existuje mnoho spôsobov, pri ktorých môže tenzometer slúžiť ako veľmi účinný doplnok tejto metódy. Jedna z možností je napríklad použitie metódy PhotoStress s cieľom lokalizácie najviac namáhaných miest skúšanej súčiastky. Tenzometrická ružica môže byť inštalovaná v ľubovoľnom bode súčiastky na nepokrytom mieste (alebo na tej istej oblasti po odstránení povrstvenia). To umožňuje určenie hodnôt deformácií, z ktorých sa dajú vypočítať hlavné napätia. Tento postup sa praktizuje zriedka, pretože nevyužíva kvantitatívne údaje získané fotoelasticimetrickou metódou. Vynárajú sa tu tiež otázky týkajúce sa presnosti umiestnenia ružice.

Pri tejto metóde sú už rozpracované i postupy korekcií nameraných údajov pričom korekčné súčinitele sú spracované ako pre ťahové tak aj ohybové namáhanie s väzbou na druh fotoelasticimetrických povrstvení a tiež materiál súčiastky. Tvar diagramu korekčných koeficientov pre separačný tenzometer je na obr.5.



Obr. 5. Korekčné faktory C_{BA} separačného tenzometra

1	Volfrám	407 GPa	7	Laminát	21 GPa
2	Oceľ	207 GPa	8	Drevo	12,5 GPa
3	Sivá liatina	110 GPa	9	Model Tech FR-10	7,9 GPa
4	Hliník	69 GPa	10	Model Tech FR-20	4,1 GPa
5	Horčík	45 GPa	11	Tuhý vinyl	2,9 GPa
6	Betón	31 GPa			

Systém Photoelastic Plus s programovacím produktom PSCalcTM umožňuje separáciu pomerných deformácií, resp. normálových napätí, vo vyšetrovanej oblasti metódou vytvorenia drážky v smere jednej z hlavných deformácií (hlavných normálových napätí). Meranie metódou PhotoStress je postavené na fyzikálnom jave, ktorý možno vyjadriť vzťahom

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = f \cdot (N - N_0). \quad (8)$$

avšak namiesto rádu izochrómy sa dosadzuje údaj kompenzátora pred zaťažením (N_0) a po zaťažení (N).

V tomto postupe využívame program PSCalcTM. Z ponuky programu vyberieme metódu merania a následne separáciu σ_1 a σ_2 . Konštrukciu zaťažíme asi do hodnoty 50% nominálneho zaťaženia. Podľa farebného obrazca vyberieme bod merania. Určíme parameter izoklíny prechádzajúcej bodom merania. Pre určenie parametra izoklíny je možné použiť svetlo z lasera upevneného na analyzátore.

Pre separáciu zložiek deformácií môžeme využiť pole izopách, t. j. čiar konštantného súčtu hlavných pomerných deformácií (presnejšie jeho polovice)

$$e = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \text{konšt.} \quad (9)$$

Súčet pomerných deformácií v dvoch vzájomne kolmých smeroch spolu s poľami izoklín a izochróm pri odrazovej fotoelascimetrii umožňujú určiť zložky deformácií.

Ak dokážeme zmerať zmenu hrúbky opticky citlivého povrstvenia Δt_c , možno určiť polovičnú hodnotu súčtu hlavných pomerných deformácií. Na meraní zmeny hrúbky povrstvenia je založený systém interferencie. Interferenčné pruhy poskytujú informácie o podobe povrstvenia pred a po zaťažení, čo umožňuje určiť zmenu hrúbky.

Ak na fotoelascimetrické povrstvenie je naparováním nanosená polopriepustná vrstva, potom dochádza k interferencii lúčov odrazených od reflexného povrchu skúšanej súčiastky a lúčov odrazených od polopriepustnej vrstvy.

Ak označíme symbolom N_p rad izopách a symbolom f_p hodnotu izopáchy (hodnotu súčtu pomerných deformácií vyvolávajúcu vznik jedného rádu izopáchy), potom hlavné pomerné deformácie možno určiť zo vzťahov, ktoré využívajú pole izochróm N

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(N_p f_p + N f), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2}(N_p f_p - N f). \quad (10)$$

Zavádzanie holografických interferenčných metód prinieslo výrazný pokrok v rozvoji doplnkových metód separácie zložiek deformácií. Sústavy dnešných holografických polariskopov umožňujú súčasnú registráciu izochróm a izopách. Výsledkom vloženia prídavných prvkov optickej sústavy, izochrómy a izopáchy možno zaregistrovať súčasne na rozdielnych negatívoch, čo eliminuje chyby a zjednodušuje interpretáciu výsledkov. Separácia zložiek deformácií pri známych poliach izopách, izochróm a izoklín sa uskutočňuje tak, ako bolo opísané vyššie.

Využitie poľa izoklín je obtiažné a môže vnieť vážne chyby pri určovaní smerov hlavných pomerných deformácií. Metódy separácie založené na využití poľa izochróm nachádzajú stále širšie využitie v reflexnej fotoelasticite pri využití stroboskopu, ako aj pri vyšetrovaní vplyvu dynamických zaťažení, kde je získanie izoklín často nemožné. V prípade, že konštrukčné prvky sú vystavené len veľmi malým hodnotám zaťaženia, sú izochrómy ťažko identifikovateľné. Presnosť ich odčítania je mimoriadne nízka, čo má výrazný vplyv na kvalitu výsledkov.

Metóda charakteristík široko využívaná v okrajových úlohách plasticity môže byť efektívne využitá i pri analýze fotoelastických polí. Pri separácii sa vychádza z rovníc (5), ktoré najčastejšie zapisujeme do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e}{f} \right) - N \sin 2\alpha_n \frac{\partial \alpha_n}{\partial x} + N \cos 2\alpha_n \frac{\partial \alpha_n}{\partial y} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial N}{\partial x} \cos 2\alpha_n + \frac{\partial N}{\partial y} \sin 2\alpha_n \right), \\ \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e}{f} \right) + N \cos 2\alpha_n \frac{\partial \alpha_n}{\partial x} + N \sin 2\alpha_n \frac{\partial \alpha_n}{\partial y} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial N}{\partial x} \sin 2\alpha_n - \frac{\partial N}{\partial y} \cos 2\alpha_n \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Neznámymi v týchto rovniciach sú funkcie $\left(\frac{e}{f}(x, y) \right)$, $\alpha_n(x, y)$. Rozdiel hlavných pomerných deformácií je určený poľom izochróm

$$\frac{\varepsilon_1}{f} - \frac{\varepsilon_2}{f} = N(x, y). \quad (12)$$

Sústavu parciálnych diferenciálnych rovníc (11) možno považovať za kvázi lineárnu vzhľadom na derivácie neznámych funkcií, je hyperbolického typu, a teda má dve sústavy skutočných charakteristík. Riešenie sústavy kvázi lineárnych hyperbolických rovníc (11) možno realizovať integrovaním rovníc charakteristík. Rovnice charakteristík a podmienky splnené pozdĺž charakteristík majú tvar

- pre prvú sústavu

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \left(\alpha_n + \frac{\pi}{4} \right), \quad (13)$$

$$\frac{1+\mu}{1-\mu} d \left(\frac{e}{f} \right) + N d\alpha_n = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial N}{\partial x} dy - \frac{\partial N}{\partial y} dx \right). \quad (14)$$

- pre druhú sústavu

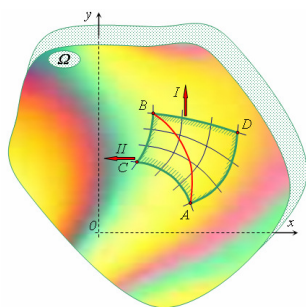
$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \left(\alpha_n - \frac{\pi}{4} \right), \quad (15)$$

$$\frac{1+\mu}{1-\mu} d \left(\frac{e}{f} \right) - N d\alpha_n = -\frac{1}{2} \left(-\frac{\partial N}{\partial x} dy + \frac{\partial N}{\partial y} dx \right). \quad (16)$$

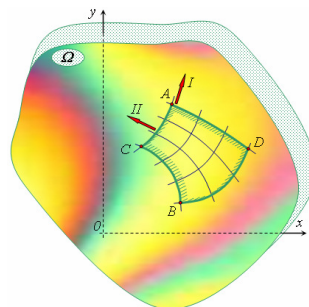
Z rovníc (13) a (15) je zrejmé, že charakteristiky tvoria pravouhlú sieť.

Vyššie uvedené rovnice možno riešiť pri rôznych daných okrajových podmienkach. V závislosti od nich sa definujú rôzne okrajové úlohy:

- Cauchyho úloha (obr.6). Pozdĺž oblúka regulárnej krivky AB , ktorá nie je charakteristikou (každá z charakteristík prvej a druhej sústavy túto krivku pretína len v jednom bode), sú známe hodnoty funkcií e/f a α_n . Riešenie je vzťahované na oblasť krivočiareho štvoruholníka $ABCD$, vytvoreného oblúkmi charakteristík prvej a druhej sústavy, prechádzajúcich koncovými bodmi krivky AB .
- Riemannova úloha (obr.7). Pozdĺž oblúkov charakteristík CA a CB patriacich do prvej aj druhej sústavy charakteristík sú známe hodnoty funkcií e/f a α_n . Riešenie je definované v krivočiarom štvoruholníku, vytvorenom oblúkmi charakteristík CA a CB , a tiež aj charakteristikami prechádzajúcimi cez body A aj B .



Obr. 6. Cauchyho okrajová úloha



Obr. 7. Riemannova okrajová úloha

- Ak sú známe okrajové hodnoty na jednej z charakteristík a na krivke, ktorá nie je charakteristikou, potom úlohu nazývame zmiešanou. Podobný prípad nastane, keď okrajové podmienky vystupujú v tvare kombinácií funkcií e/f a α_n .

Metóda separácie pomerných deformácií pomocou charakteristík má všeobecný charakter. Avšak aj tu je potrebné uviesť zvláštne prípady, pri ktorých použitie tejto metódy prináša výrazné zjednodušenie. Jedným z takýchto prípadov je pole deformácií, ktoré existuje v rovine symetrie sledovanej oblasti. Riešenie sa vykonáva pre jednu stranu tejto roviny. Výpočty pre bod k ležiaci v rovine symetrie, prebiehajúcej pozdĺž osi (napr. x) sa realizujú tak, že sa vychádza z bodov 1 a 2 usporiadaných symetricky po oboch stranách tejto osi (obr.8). Pri riešení v oblasti ležiacej pod osou x , sú z prvých krokov výpočtového procesu známe hodnoty $(e/f)_1$ a $(\alpha_n)_1$ v bode 1. Aby bolo možné určiť bod k , je potrebné taktiež poznať všetky hodnoty v bode 2.

Z úvahy o symetrii poľa deformácií vyplývajú nasledujúce súvislosti:

$$x_2 = x_1, \quad y_2 = -y_1, \quad N_2 = N_1, \quad \left(\frac{e}{f}\right)_2 = \left(\frac{e}{f}\right)_1, \\ \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_2 = \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_1, \quad \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)_2 = -\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)_1. \quad (17)$$

Pri závislostiach $(\alpha_n)_1$ a $(\alpha_n)_2$ môžu sa vyskytnúť dva prípady:

- ak $\varepsilon_y > \varepsilon_x$ potom $(\alpha_n)_2 = \pi - (\alpha_n)_1$,
- ak $\varepsilon_y < \varepsilon_x$ potom $(\alpha_n)_2 = -(\alpha_n)_1$.

Tieto závislosti vyplývajú z toho, že v bode k musí byť v prvom prípade $(\alpha_n)_k = \pi/2$, v druhom prípade $(\alpha_n)_k = 0$.

Uvedené postupy je možné spracovať numericky, aproximáciou plochy $N(x, y)$ množinou trojuholníkových elementov.

Z uvedených úvah je možné usúdiť, že určenie parciálnych derivácií poradia izochróm prostredníctvom metódy charakteristík pri separácii pomerných deformácií je náročné. Navyše, nahradenie povrchu $N(x, y)$ súborom plochých trojuholníkových elementov si vyžaduje zavedenie trojuholníkovej siete na analyzovanú oblasť, čo je dosť prácne. Uvedená metóda sa ďalej odlišuje od predchádzajúcej v tom, že po zavedení vrstevnicovej mapy $N(x, y)$ do počítača si numerické operácie vyžadujú len vyhľadávanie súradníc tohto povrchu v žiadanom bode.

Pri tejto metóde nie je potrebné určovať uhly sklonu povrchu. Táto modifikácia sa opiera o transformáciu výrazov vystupujúcich na pravej strane rovníc (14) a (16).

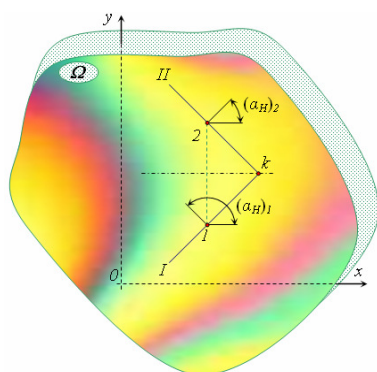
Výrazy majú tvar:

- pre prvú sústavu charakteristík

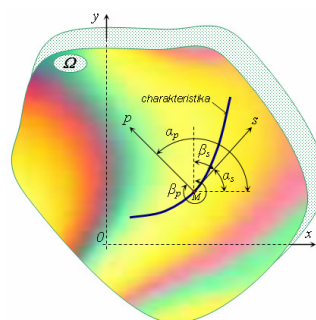
$$D_1 = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial N}{\partial x} dy + \frac{\partial N}{\partial y} dx \right),$$

- pre druhú sústavu charakteristík

$$D_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N}{\partial x} dy - \frac{\partial N}{\partial y} dx \right). \quad (18)$$



Obr. 8. Bod k na osi symetrie



Obr. 9. Smery normály a dotýčnice
v bode charakteristiky

Separácia pomerných deformácií sa výrazne zjednodušuje ak súčiastka obsahuje os symetrie.

V praxi sa často stretávame s prípadmi, keď pri experimente prostredníctvom fotoelastickej metódy je možné vychádzať iba z obrazu izoklín. Takáto situácia nastane, ak konštrukčné prvky môžeme zaťažovať veličinami veľmi malých hodnôt. V tomto prípade sú izochrómy ťažko identifikovateľné a presnosť odčítania ich poradia je nízka, čo má podstatný vplyv na kvalitu výsledkov experimentu.

Treba poznamenať že prezentované metódy separácie pomocou metódy charakteristík sa v súčasnosti na katedre spracovávajú aj pre ortotrópne materiály a programové produkty vyvíjané ako doplnky k PSCalc™ umožnia okrem využitia metód klasickej separácie z transmisnej fotoelasticimetrie i uplatnenie metód ďalšieho parametra určeného experimentálne ako aj metód s využitím len polia izochróm alebo izoklín.

4. Záver

V minulosti pre určenie hodnôt jednotlivých zložiek hlavných napätí bolo bežným postupom využitie metód transmisnej fotoelasticimetrie neskôr vykonanie druhého nezávislého fotoelastickeho merania v danom bode pod šikmým uhlom, na rozdiel od prvého merania, ktoré sa uskutočňuje pomocou osvetlenia kolmo na pozorovaný povrch. Meranie pod určitým uhlom si však vyžaduje veľkú skúsenosť. Okrem toho optické zariadenie potrebné pre meranie pod uhlom niekedy prichádza do kontaktu s vystupujúcimi časťami skúmaného povrchu, čo znemožňuje meranie. Ďalšie merania pomocou separačných tenzometrov a metódy drážky umožní určiť zložky napätí pri využití nových meracích systémov M040 a LF/Z-2.

Dnes naše snahy smerujú k využitiu poznatkov vyplývajúcich len z poznania izochróm a izoklín prostredníctvom tzv. charakteristík resp. modifikovaných charakteristík. Tvorba týchto postupov sa realizuje pre izotrópne tak aj pre ortotrópne materiály ako aj pre oblasť

pružne plastickej deformácie pričom neustále posilňujeme našu spoluprácu v oblasti výskumu a aplikácie týchto metód s Polytechnikou Rzeszów kde s touto metódou majú mimoriadne dobré skúsenosti dnes už i pri riešení otázok šírenia trhlín pri cyklickom zaťažení [6].

PodĎakovanie: Autori ďakujú MŠ SR za podporu v rámci riešenia projektu Štátneho programu výskumu a vývoja č. 2003 SP 51/028 00 09/028 09 11.

Literatúra

- [1] Bakunowicz, J., Kopecki, H.: *Experimentálne skúmanie nosnosti kompozitných pravouhlých sendvičových dosiek zaťažených axiálnym tlakom*. Acta Mechanica Slovaca 1/2006, str. 33-40.
- [2] Doyle, J. F.: *Photoelastic Stress Separation Along Lines of Symmetry*. Experimental Mechanics, No.3., 1986, str. 297-300.
- [3] Knežo, D., Kimáková, Z.: *O aplikácii matematických metód pri riešení technického problému*. Proceedings of the 1st International Conference on Applied Mathematics and Informatics at Universities '2001, str. 73-78.
- [4] Trebuňa, F.: *Princípy, postupy, prístroje v metóde Photostress*. Typopress, Košice, 2006.
- [5] Trebuňa, F., Šimčák, F., Jurica, V., Tomčík, J.: *Niekoľko poznámok k možnosiam a prostriedkom uplatnenia metódy PhotoStress na TU v Košiciach*. Acta Mechanica Slovaca 1/2006, str. 593-600.
- [6] Zacharzewski, J.: *Experimentálna analýza šírenia sa trhliny v tenkostennej doske s kruhovým otvorom pri cyklickom axiálnom tlaku*. Acta Mechanica Slovaca 1/2006, str. 651-656.