

Experimentální Analýza Napětí 2003

COMPUTATIONAL SIMULATION AND ACCURACY ANALYSIS OF UNCONVENTIONAL EXPERIMENTAL METHOD FOR EQUIBIAXIAL STRESS-STRAIN DEPENDENCE INVESTIGATION OF ELASTOMERS

POČÍTAČOVÁ SIMULACE A ANALÝZA PŘESNOSTI NEKONVENČNÍ ZKUŠEBNÍ METODY PRO MĚŘENÍ DVOUOSÉ NAPĚŤOVĚ DEFORMAČNÍ CHARAKTERISTIKY ELASTOMERŮ

Pavel Skácel*, Jiří Burša**

The knowledge of the stress-strain behaviour of elastomers in basic deformation modes is necessary for credible numerical modelling of their mechanical response. One of the stress-strain characteristics needed is the so-called equibiaxial characteristic. Usually the experimental determination of such characteristic is not easy because of the high requirements on the experimental equipment. This paper deals with an unpretentious experimental technique for measuring of equibiaxial stress-strain dependence of elastomers. The method is numerically simulated using FEM, compared to standard methods and its accuracy and practical usefulness is analyzed. The technique could also be used for equibiaxial strength measuring.

Keywords: equibiaxial tension, equibiaxial strength, elastomers, rubber, numerical modelling, FEM

Klíčová slova: dvouosý tah, pevnost při dvouosém namáhání, elastomery, pryž, výpočtové modelování, MKP

1 Úvod, motivace k experimentálnímu měření dvouosé napjatosti

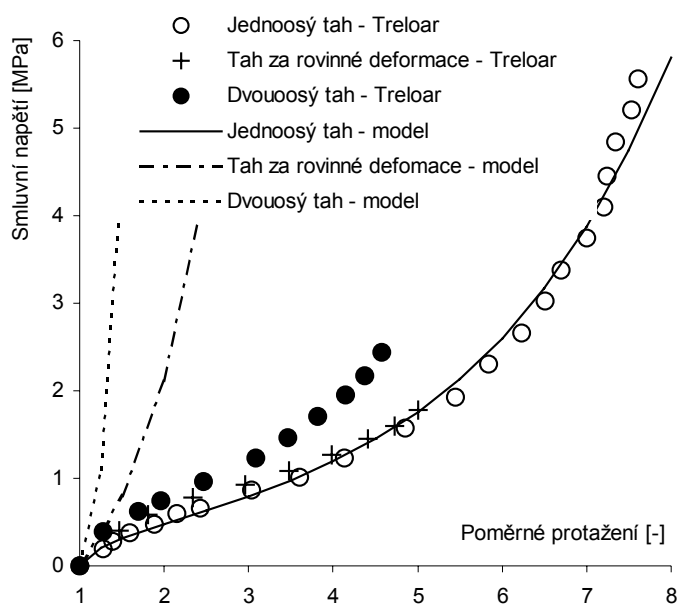
Základním zástupcem elastomerů je technická pryž, která v současné době nachází čím dál větší uplatnění v celé řadě průmyslových odvětví. S tímto rozvojem je spojena též snaha o výpočtové modelování její mechanické odezvy. Elastomery se mj. vyznačují schopností dosahovat velmi velkých deformací bez porušení a nelineární napěťově deformační charakteristikou, což se odráží v přístupu k jejich výpočtovému modelování.

Pro matematický popis napěťově deformačního chování elastomerů za velkých deformací se používají rozličné druhy modelů chování materiálu (tzv. hyperelastické modely). Tyto modely jsou definovány prostřednictvím funkcí pro energii napjatosti W , ve kterých vystupují proměnné popisující stav deformace a parametry modelu chování materiálu. Jednotlivé modely se navzájem odlišují tvarem této funkční závislosti a počtem a fyzikálním významem parametrů modelu. Hodnoty parametrů jsou běžně získávány na základě regrese modelové a experimentální odezvy při základních typech deformace – v tzv. základních deformačních módech. Deformačně napěťové závislosti příslušné jednotlivým deformačním módům tak plní funkci vstupních dat pro následné výpočtové modelování.

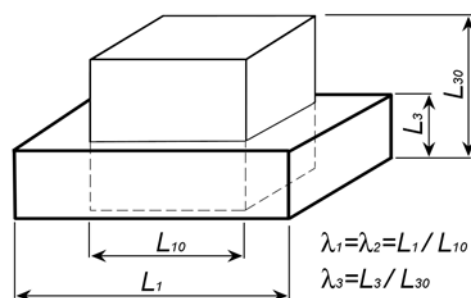
* Ing. Pavel Skácel, Institute of Solid Mechanics, Brno University of Technology, Technická 2896/2, 616 69 Brno, Czech Republic, skacy@email.cz, tel.: +420 / 5 4114 2868

** Ing. Jiří Burša, PhD., Institute of Solid Mechanics, Brno University of Technology, Technická 2896/2, 616 69 Brno, Czech Republic, bursa@umtn.fme.vutbr.cz, tel.: +420 / 5 4114 2868

Identifikaci parametrů zvoleného modelu materiálového chování lze samozřejmě provést z jednoosé tahové zkoušky provedené v dostatečném rozsahu deformace. Možné negativní důsledky takového přístupu pro následné výpočtové modelování ostatních deformačních módů demonstruje obr. 1, který srovnává základní experimentální charakteristiky s charakteristikami modelu, jehož parametry byly získány pouze na základě jednoosé tahové zkoušky. Z obrázku je zřejmé, že deformační módy, které nebyly zahrnuty do vstupních dat pro určení materiálových parametrů, mohou být následně simulovány velmi nevěrohodně. Schopnost modelu věrohodně předpovědět i jiné deformační módy, než které byly obsaženy ve vstupních datech lze vnímat jako jedno z kritérií kvality modelu ve vztahu k danému druhu materiálu. Například model typu Arruda-Boyce není dle jeho autorů [4] i dle zkušeností autorů tohoto příspěvku příliš citlivý na nedostatek experimentálních dat, naopak Ogdenův model [3] je v tomto smyslu velmi citlivý (viz. obr. 1) a jeho použití tedy vyžaduje podstatně rozsáhlejší experimentální výzkum.



obr. 1 Srovnání experimentálních (dle [2]) a modelových (Ogden) charakteristik pryže, parametry modelu získány regresí pouze na základě jednoosé tahové zkoušky



obr. 2 Jeden ze základních deformačních módů pro zkoušení elastomerů

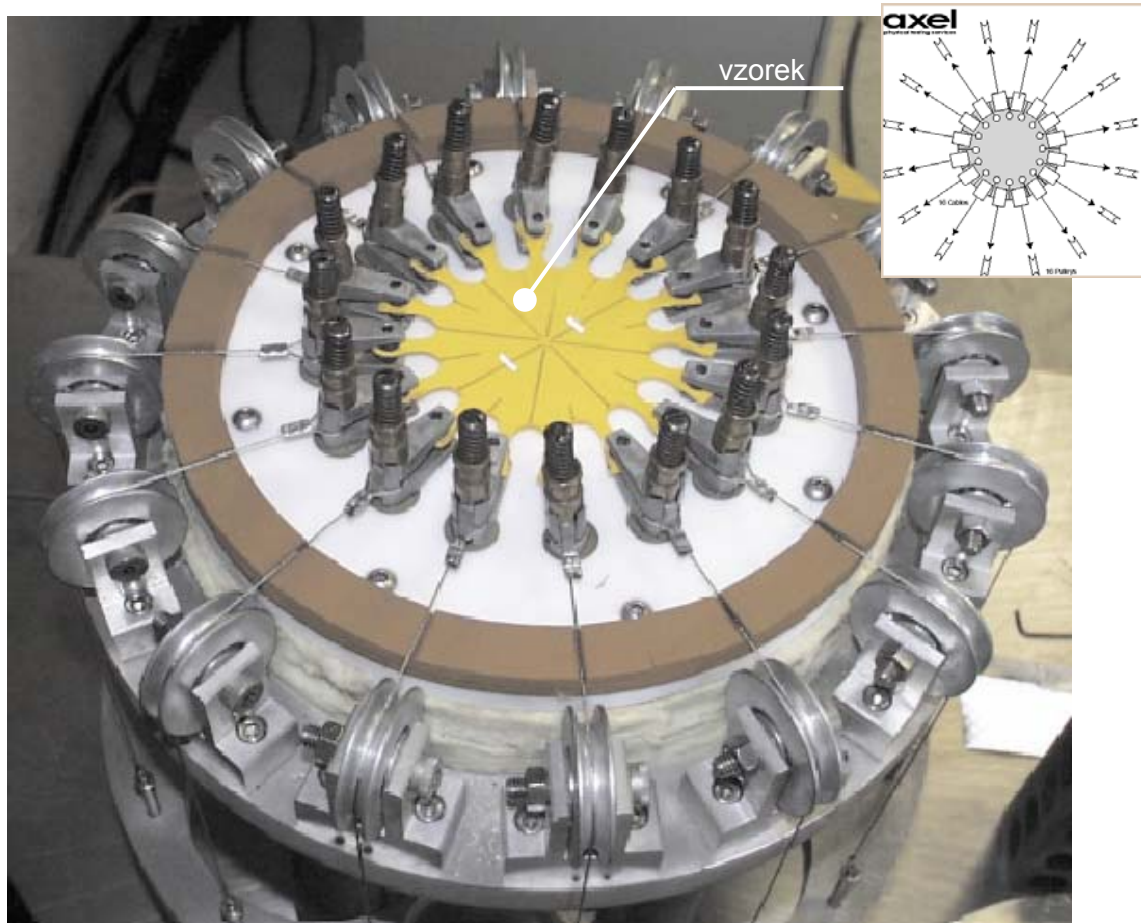
Výběrem vhodného typu modelu lze tedy negativní důsledky plynoucí z použití pouze jediného typu experimentální charakteristiky částečně eliminovat, zcela je však odstranit nelze. Proto je vhodné, pokud je to možné, pro stanovení hodnot materiálových parametrů využívat současně více typů základních napěťově deformačních charakteristik. Pro případ elastomerů je běžně doporučováno provádět alespoň tři základní druhy experimentů, které dostatečně pokrývají prostor víceosých deformací a tak zvyšují věrohodnost popisu obecných deformačních módů. Velmi přínosným deformačním módem je mód dle obr. 2, který lze experimentálně zjišťovat dvěma základními vzájemně ekvivalentními technikami: zkouškou jednoosým tlakem a zkouškou dvouosým rovnoměrným tahem.

- **zkouška jednoosým tlakem** – provádí se na vzorku tvaru válce, který je volně vložen mezi rovinná rovnoběžná čela pístů zkušebního stroje a poté jimi stlačován. Zkouška je velmi nenáročná, její použitelnost je však omezená, neboť při velikosti přetvoření vyšším než cca 30% začíná být nehomogenita deformace (soudečkovitost) v důsledku tření velmi podstatná [1].



obr. 3 Zkouška jednoosým tlakem (dle [6])

- **zkouška dvouosým rovnoměrným tahem, tzv. ekvibiaxiální** - zkouška se běžně provádí na membránovém (tenkém) vzorku kruhového, čtvercového, příp. i jiného tvaru, který je všesměrově natahován ve střednicové rovině. Rozsah vyšetřované deformace není omezen negativními důsledky tření. Vzorky lze snadno získat ze stejných polotovarů jako vzorky pro jednoosou tahovou zkoušku, čímž jsou zaručeny stejné mechanické vlastnosti obou typů vzorků. Nevýhodou je nerovnoměrná deformace vzorku v důsledku okrajových jevů od aplikace zatížení, proto musí být deformace měřena přímo z povrchu vzorku - toto se běžně provádí optickými metodami. Zásadní nevýhodou vůči jednoosé zkoušce je poměrně komplikovaná konstrukce běžně používaných zkušebních strojů. Příklad jádra standardního zkušebního stroje pro dvouosé zkoušky ukazuje obr. 4 - všesměrově aplikované zatížení je poměrně složitou soustavou 16-ti lanek a kladek svedeno do společného směru a převedeno na jediný aktivní člen tvaru prstence, jehož relativním pohybem vůči rámu je dosaženo požadované deformace vzorku.



obr. 4 Schéma a fotografie jádra zkušebního stroje pro dvouosé zkoušky elastomerů (dle [5])

Běžně používané stroje pro ekvibiaxiální testy elastomerů jsou sice rozličných konstrukcí, avšak mají jednu společnou vlastnost – konstrukční složitost a tím i vysokou cenu omezující praktickou dostupnost těchto zkoušek. Tento příspěvek se zaměřuje na relativně nenáročnou zkušební metodu pro měření dvouosé napětově deformační charakteristiky elastomerů za velkých deformací a na základě výsledků výpočtového modelování se snaží analyzovat její praktickou použitelnost.

2 Podstata analyzované zkušební metody

Analyzovaná metoda předpokládá membránový (tenký) vzorek kruhového tvaru – tedy obdobný jako u standardních testů - obr. 4. Liší se způsobem vyvození rovnoměrné rovinné napjatosti, který spočívá v sevření obvodu vzorku mezi dvěma mezikruhovými čelistmi a v následném zatěžování jedné strany vzorku tlakem tekutého média (druhá strana zůstává nezatížena). Vzorek se deformuje dle obr. 7 a v blízkém okolí bodu A (bod na ose rotační symetrie) je očekávána rovnoměrná rovinná napjatost. Pro konstrukci napětově deformační charakteristiky materiálu vzorku je nutno určit stavy deformace a napjatosti v blízkém okolí bodu A v jednotlivých zátěžných krocích.

Měření poměrného protažení na povrchu $\lambda_1 = \lambda_2$ v blízkém okolí bodu A lze provádět obdobnými technikami jako u standardních biaxiálních testů – tj. např. opticky. Poměrné protažení kolmo ke střednicové rovině λ_3 lze pro uvažované materiály dopočítat z předpokladu nestlačitelnosti (Pois. poměr $\nu = 0.5$):

$$\lambda_3 = (\lambda_1)^{-2} \quad (1)$$

Určení napětí σ (Cauchy) lze provést na základě předpokladu o rovnoměrném membránovém typu napjatosti z podmínky statické rovnováhy deformované kulové membrány:

$$\sigma = \frac{pr}{2t} \quad (2)$$

kde: p je velikost aplikovaného tlaku – měřeno v průběhu zkoušky
 r je poloměr křivosti deformované konfigurace vzorku v blízkém okolí bodu A – určován v průběhu zkoušky (např. aproximací v blízkém okolí bodu A)
 t je tloušťka vzorku v blízkém okolí bodu A – lze snadno dopočítat jako

$$t = \lambda_3 \cdot t_0 \quad (3)$$

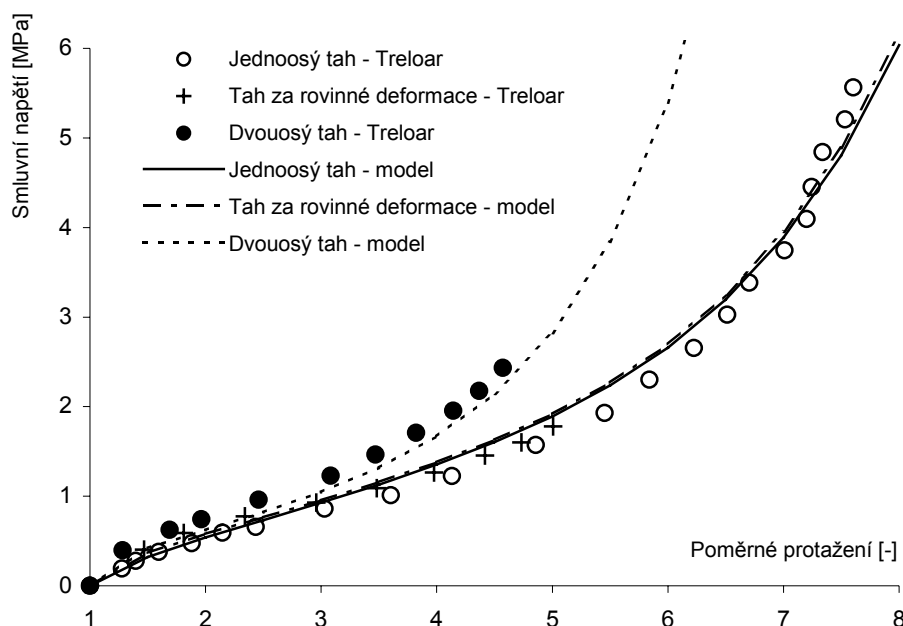
t_0 je počáteční tloušťka vzorku – měřeno před započítím zkoušky

Samotný experiment tedy zahrnuje počáteční proměření tloušťky vzorku t_0 , jeho upnutí a postupné zatěžování tlakovým médiem při průběžném měření jeho tlaku p , přetvoření λ_1 ($=\lambda_2$) a poloměru křivosti povrchu r v oblasti vrchlíku deformovaného vzorku (v blízkém okolí bodu A). Po zpracování naměřených dat je možno přímo konstruovat požadovanou charakteristiku z hodnot skutečných napětí σ a příslušných poměrných protažení λ_1 .

3 Počítačová simulace analyzované zkušební metody a její výsledky

Za účelem ověření použitelnosti a přesnosti analyzované zkušební metody byl průběh měření včetně samotného upnutí vzorku simulován pomocí metody konečných prvků s využitím programového systému *ANSYS 6.1*.

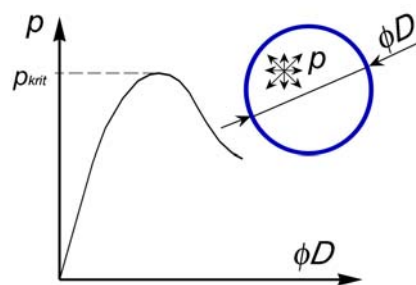
Pro popis deformačně napětového chování pryže byl použit model typu Arruda-Boyce [4] s následujícími parametry: $\mu=0.296 \text{ MPa}$, $\lambda_L=5.05$ ($\mu \sim$ počáteční modul pružnosti ve smyku, $\lambda_L \sim$ charakteristická hodnota limitního poměrného protažení). Hodnoty parametrů μ a λ_L byly získány na základě experimentálně zjištěných napětově deformačních charakteristik konkrétní pryže převzatých z [2]. Srovnání experimentálních charakteristik s charakteristikami použitého modelu znázorňuje obr. 5.



obr. 5 Srovnání experimentálních (dle [2]) a modelových (Arruda-Boyce) charakteristik pryže

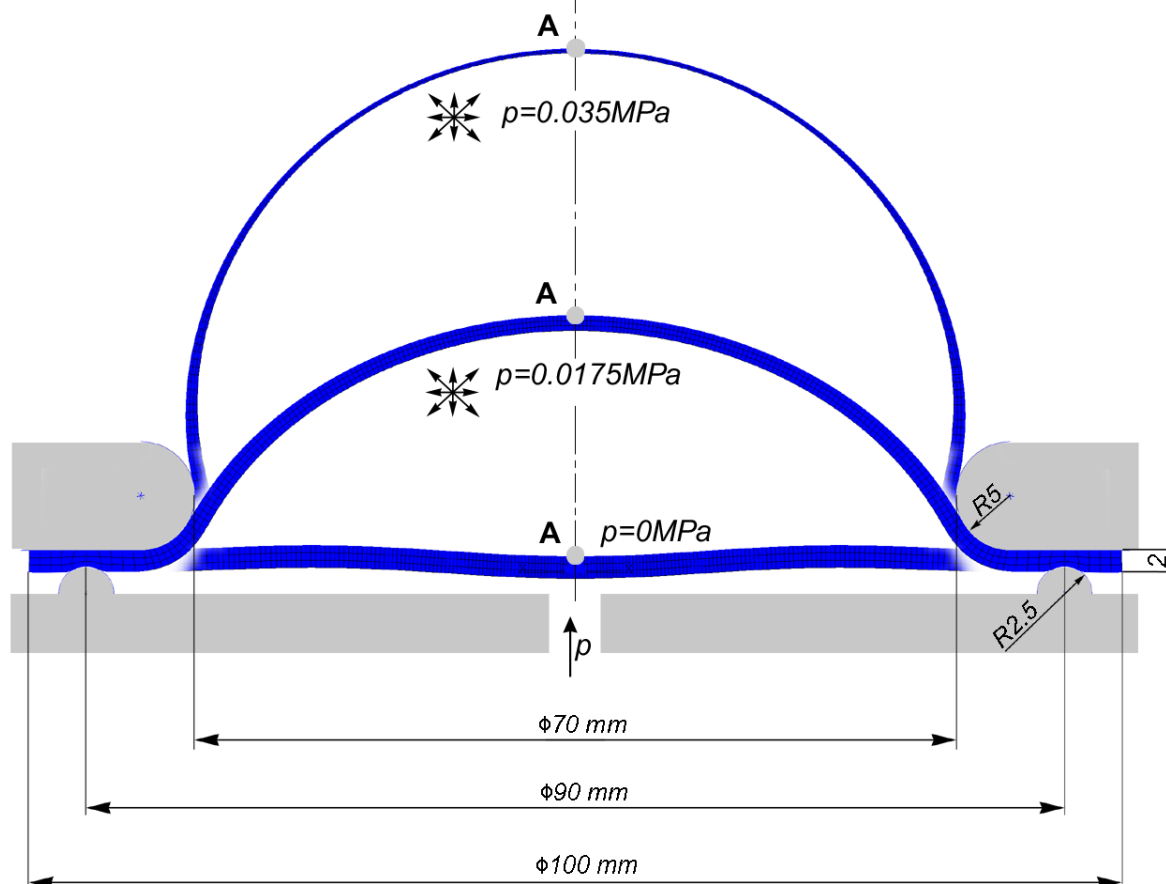
Pryžový vzorek o rozměrech $\phi 100 \times 2 \text{ mm}$ byl modelován s využitím rotační symetrie. Obě upínací čelisti byly modelovány jako tuhá tělesa. Horní čelist obsahuje středový otvor skrz nějž se vzorek deformuje. Dolní čelist obsahuje kruhový výstupek jednoznačně definující místo upnutí. Geometrie soustavy je patrná z obr. 7. Mezi čelistmi a pryžovým vzorkem byl modelován kontaktní styk včetně zahrnutí smykového tření (koeficient smyk. tření $f=0.8$). Vzorek byl nejprve deformačně sevřen mezi horní a spodní čelist (vzájemný posuv čelistí $\Delta=0.5 \text{ mm}$), poté postupně zatěžován tlakem $p=0$ až 0.035 MPa na jeho dolní straně. Horní hranice zátěžného tlaku byla zvolena s ohledem na nestabilní efekty nastávající nad touto hodnotou. Zpočátku je rostoucí deformace doprovázena rostoucím tlakem p , po dosažení jeho kritické hodnoty p_{krit} nastává ztráta stability a nadále rostoucí deformace je naopak doprovázena klesající hodnotou tlaku p . Situace je analogická chování nafukovaného hyperelastického balónu – symbolicky shrnuto v obr. 6. V důsledku numerických obtíží plynoucích z popisované ztráty stability byla simulace provedena pouze v rozsahu příslušejícím úvodní (stabilní) fázi tj. pro tlak $p=0$ až 0.035 MPa . Pro účely analýzy kap. 3.1 je tento rozsah dostačující, pro ostatní analýzy kap. 3.2, kap 4 byl účelově pozměněn parametr materiálového modelu λ_L , tak aby k popisované ztrátě stability nedocházelo a výpočtová simulace tak mohla být provedena v plném rozsahu.

Pozn. Při reálném experimentu neznamená popisované nestabilní chování vážnou překážku, neboť vhodným typem regulace tlakového zatížení se mu lze snadno vyhnout. Například postupné zatěžování objemovými přírůstky tlakového média povede k autoregulaci tlaku a umožní stabilizovat i stavy které se nachází za vrcholem charakteristiky obr. 6.



obr. 6 Charakteristika hyperelastického balónu zatíženého vnitřním přetlakem p

Obr. 7 znázorňuje deformaci vzorku v jednotlivých fázích zkoušky. Výsledky simulace ukazují, že deformace vzorku splňuje očekávání a jeho uchycení v čelistech je stabilní bez skluzů či vysmekávání v celém rozsahu analyzovaného zatížení. Vyhodnocována je oblast v blízkosti osy symetrie (bod A), kde nastává rovnoměrná rovinná napjatost. Rovinný tvar vzorku přechází nejprve na vypouklý, poloměr křivosti r se zmenšuje. V této úvodní fázi hraje podstatnou roli ohýbání vzorku, které je nežádoucí, neboť narušuje membránový stav napjatosti, z jehož předpokladu vychází metodika experimentálního určení napětí (rov.(2)). V následné fázi postupně přestává být ohýbání vzorku podstatné a dominuje membránová složka napětí. Pro docílení membránového stavu napjatosti jsou vhodné vzorky jejichž ohybová tuhost je ve srovnání s tuhostí v tahu dostatečně malá, tj. vzorky s velmi malou tloušťkou ve srovnání s jeho ostatními rozměry.



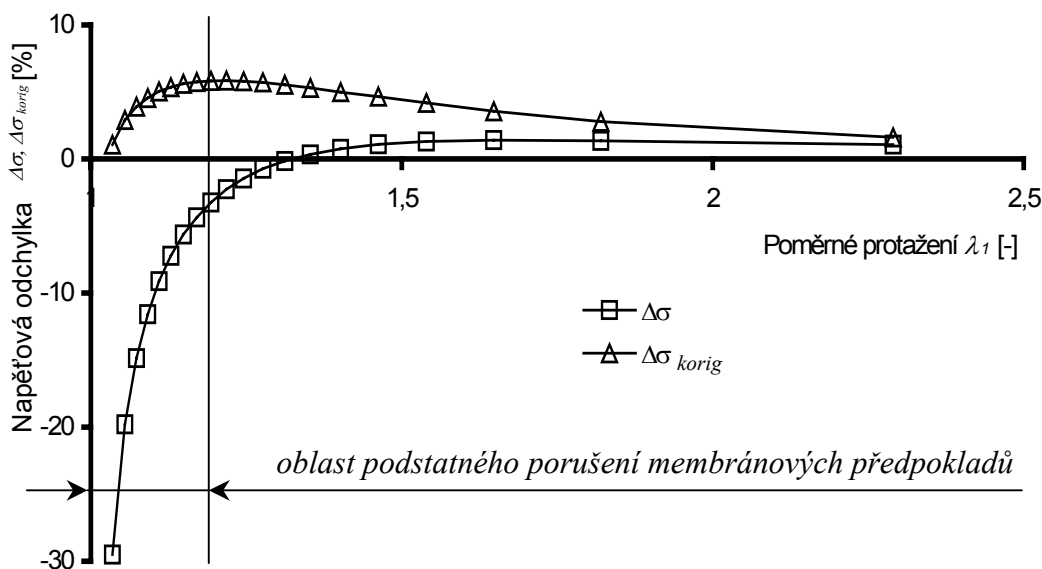
obr. 7 Jednotlivé fáze deformace vzorku

3.1 Analýza odchylek v určování napětí v důsledku nesplnění membránových předpokladů

Pozornost autorů je v první fázi analýzy zaměřena na kvantifikování chyby při určování napětí dle rov. (2) v důsledku odchylek od membránového stavu napjatosti. Pro jednotlivé zátěžné kroky byla přímo z výsledků počítačové simulace (MKP) odečtena hodnota poloměru křivosti r a aktuální tloušťky t . Následně bylo dopočítáno Cauchyho napětí σ dle rov.(2) a srovnáno s jeho skutečnou hodnotou σ_{MKP} odečtenou z výsledků simulace. Vzájemná relativní odchylka $\Delta\sigma$ definovaná jako

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma - \sigma_{MKP}}{\sigma_{MKP}} \quad (4)$$

je v závislosti na poměrném protažení λ_1 vynesena v grafu na obr. 8. Ze závislosti je zřejmé, že metodika určování napětí dle rov.(2) je pro analyzovanou konfiguraci prakticky použitelná zvláště pro vyšší hodnoty deformace (pro $\lambda_1 > 1.25$ je $\Delta\sigma < 3\%$). Vysoká hodnota odchylky $\Delta\sigma$ v oblasti $\lambda_1 < 1.2$ je způsobena podstatným porušením membránových předpokladů.



obr. 8 Průběh nekorigované ($\Delta\sigma$) a korigované ($\Delta\sigma_{korig}$) odchylky v určení napětí v závislosti na poměrném protažení λ_1

Ve snaze o snížení hodnot odchylky $\Delta\sigma$ i v oblasti $\lambda_1 < 1.2$ byla navržena korekce na ohyb. Korekce spočívá v dopočítání příslušné složky napětí u povrchu vzorku (vznikající v důsledku jeho ohýbání) na základě změřeného poloměru křivosti povrchu r . Korekce vychází z teorie malých deformací a lineárního nestlačitelného ($\nu=0.5$) materiálového modelu. Se zahrnutím navrhované korekce přechází vztah (2) na vztah následující:

$$\sigma_{korig} = \frac{pr}{2t} + \frac{Et}{r} \quad (5)$$

kde E je počáteční modul pružnosti v tahu, σ_{korig} je určované skutečné (Cauchy) napětí korigované na ohyb.

Pro zhodnocení účinku navržené korekce byla zavedena odchylka $\Delta\sigma_{korig}$ analogicky k odchylce $\Delta\sigma$.

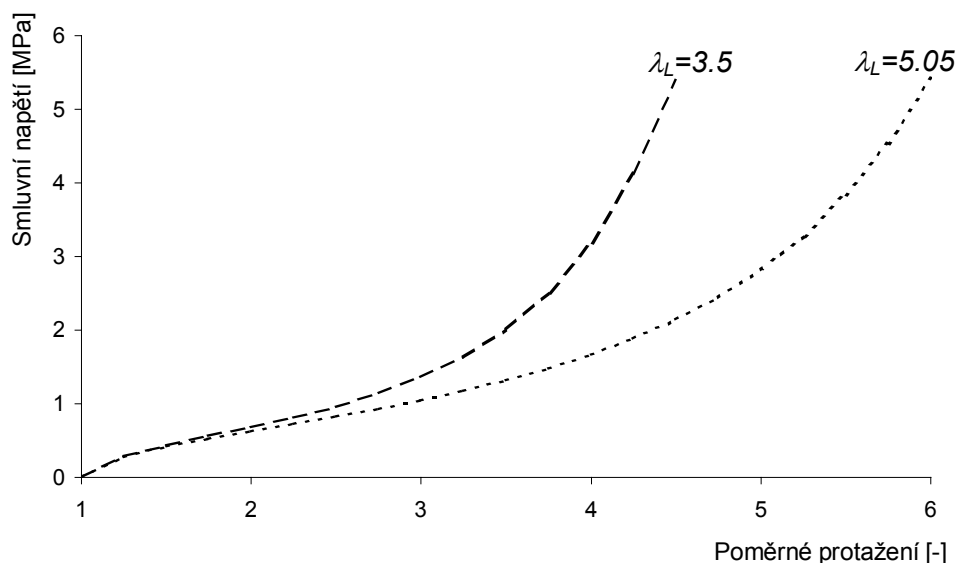
$$\Delta\sigma_{korig} = \frac{\sigma_{korig} - \sigma_{MKP}}{\sigma_{MKP}} \quad (6)$$

Hodnota $\Delta\sigma_{korig}$ je v závislosti na poměrném protažení λ_I taktéž vynesena v grafu na obr. 8. Ze srovnání $\Delta\sigma$ a $\Delta\sigma_{korig}$ plyne pozitivní přínos zavedené korekce v podobě snížení absolutních velikostí odchylek v určování napětí v oblasti $\lambda_I < 1.2$. Po zavedení korekce se sice chyba v určování napětí dle (5) v oblasti $\lambda_I > 1.2$ zvýšila, v rámci celého analyzovaného rozsahu deformace však nepřesahuje hodnotu 6%. Korekce vyžaduje znalost počátečního modulu pružnosti v tahu E , jeho hodnota je však snadno zjistitelná např. na základě jednoosé tahové zkoušky, která pro svoji relativní jednoduchost běžně předchází zkouškám dvouosým.

Výsledky uvedené na obr. 8 vychází z předpokladu známé hodnoty poloměru křivosti r v bodě A . Pozornost následující analýzy je zaměřena na praktické měření této veličiny a na důsledky plynoucí z nepřesností tohoto měření.

3.2 Analýza odchylek v určování napětí se zahrnutím nepřesnosti v určování poloměru křivosti r

Za účelem následující analýzy byla hodnota parametru Arruda-Boyceova materiálového modelu $\lambda_L = 5.05$ účelově pozměněna na hodnotu $\lambda_L = 3.50$, všechny ostatní parametry zůstaly nezměněny. Napětově deformační charakteristiky obou modelů srovnává obr. 9.



obr. 9 Srovnání dvouosé napětově deformační charakteristiky použitých modelů materiálového chování pryže

Motivací ke změně parametru λ_L byla snaha umocnit závěrečnou progresivně rostoucí část napětově deformační charakteristiky, což umožnilo výpočtově simulovat průběh zatěžování zkušebního vzorku do vyšší hodnoty deformace, která prakticky odpovídá (dle zkušeností autorů) jeho porušení ($\lambda_{I \max} \sim 4.0$) a ukončení experimentu.

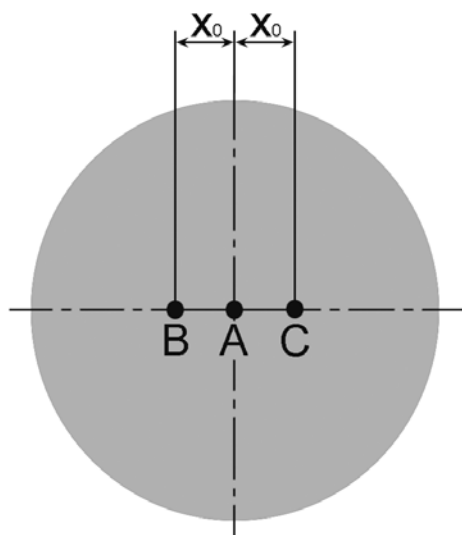
Pro měření poloměru křivosti r v praxi je dále uvažována následující metoda:

- 1) v nedeformovaném stavu jsou na vzorku (barevně) označeny body A, B, C - viz obr. 10
- 2) v průběhu zkoušky je monitorována relativní poloha těchto bodů vyjádřená veličinami r_v a h_v - viz. obr. 11
- 3) body A, B, C jsou v jednotlivých zátěžných stavech vzorku prokládány kruhovým obloukem, jehož poloměr r_{aprox} aproximuje poloměr křivosti vzorku na úseku $B-A-C$. Pro hodnotu r_{aprox} byl za předpokladu rotačně symetrické deformace vzorku odvozen vztah:

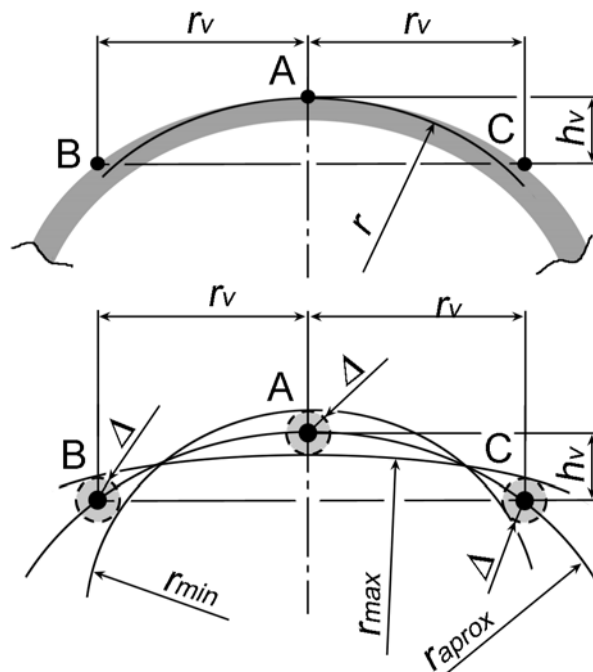
$$r_{aprox} = \frac{1}{2} \frac{r_v^2 + h_v^2}{h_v} \quad (7)$$

Rov. (7) vychází z předpokladu absolutně přesného určení polohy bodů A, B, C . V důsledku nepřesnosti měření Δ polohy bodů A, B, C bude při reálném experimentu určený poloměr křivosti ležet v intervalu ohraničeném hodnotami r_{min}, r_{max} (obr. 11):

$$r_{min} = \frac{1}{2} \frac{r_v^2 + h_v^2 + 2\Delta h_v}{h_v + 2\Delta}; \quad r_{max} = \frac{1}{2} \frac{r_v^2 + h_v^2 - 2\Delta h_v}{h_v - 2\Delta} \quad (8)$$



obr. 10 Označení vzorku body A, B, C v nedeformovaném stavu



obr. 11 Meridiánový řez deformovaným vzorkem, mezní případy aproximace poloměru křivosti r v bodě A

Šířku intervalu (r_{min}, r_{max}) je třeba minimalizovat, z tohoto hlediska je pro danou hodnotu nepřesnosti měření Δ vhodnější velká počáteční rozteč x_0 . Křivka tvořená vnější plochou deformovaného vzorku v meridiánovém řezu mezi body B, A, C však není obecně kruhovým obloukem ($r_{aprox} \neq r$). Z tohoto hlediska je naopak vhodnější malá hodnota x_0 , aby výsledná hodnota r_{aprox} byla dostatečně blízká velikosti skutečného poloměru křivosti r v bodě A . Cílem této analýzy je vymezit vhodnou počáteční vzdálenost x_0 bodů (značek) A, B (resp. B, C), tak aby nepřesnost v určování napětí v důsledku nepřesnosti v určování poloměru křivosti r byla co nejmenší.

Z výsledků počítačové simulace (MKP) byla pro jednotlivé zátěžné stavy odečtena „skutečná“ relativní poloha (r_v , h_v) zvoleného bodu B (resp. C), dle rov. (7), (8) byly pro zvolenou hodnotu Δ (viz. níže) spočteny hodnoty r_{aprox} , r_{min} , r_{max} a dle rov. (5) byly dopočteny¹ příslušné hodnoty napětí $\sigma^{r\ aprox}$, $\sigma^{r\ min}$, $\sigma^{r\ max}$ (včetně korekce na ohyb):

$$\sigma^{r\ aprox} = \frac{pr_{aprox}}{2t} + \frac{Et}{r_{aprox}}; \quad \sigma^{r\ min} = \frac{pr_{min}}{2t} + \frac{Et}{r_{min}}; \quad \sigma^{r\ max} = \frac{pr_{max}}{2t} + \frac{Et}{r_{min}} \quad (9)$$

V důsledku uvažované nepřesnosti měření Δ bude tedy určené napětí ležet v intervalu ($\sigma^{r\ min}$, $\sigma^{r\ max}$). Pro hodnocení odchylky tohoto napětí od skutečné hodnoty (σ_{MKP}) byly zavedeny následující odchylky $\Delta\sigma^{r\ aprox}$, $\Delta\sigma^{r\ min}$, $\Delta\sigma^{r\ max}$ analogicky k odchylce $\Delta\sigma_{korig}$:

$$\Delta\sigma^{r\ aprox} = \frac{\sigma^{r\ aprox} - \sigma_{MKP}}{\sigma_{MKP}}; \quad \Delta\sigma^{r\ min} = \frac{\sigma^{r\ min} - \sigma_{MKP}}{\sigma_{MKP}}; \quad \Delta\sigma^{r\ max} = \frac{\sigma^{r\ max} - \sigma_{MKP}}{\sigma_{MKP}} \quad (10)$$

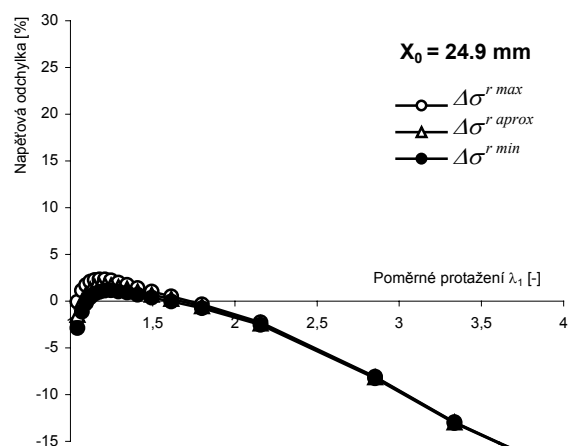
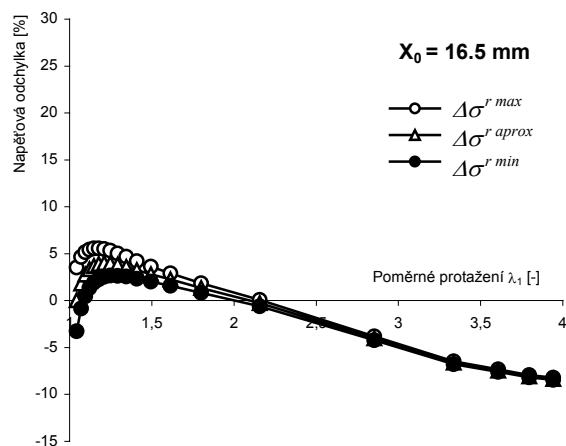
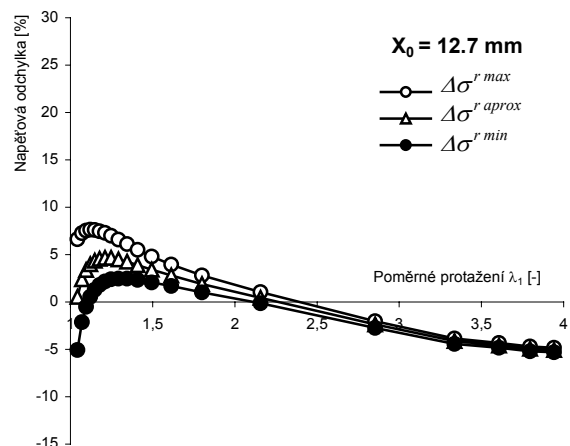
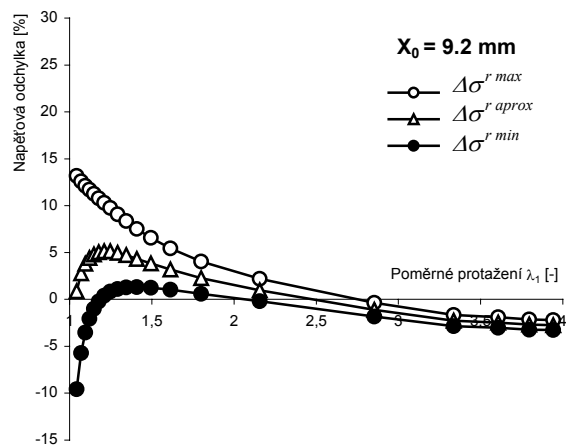
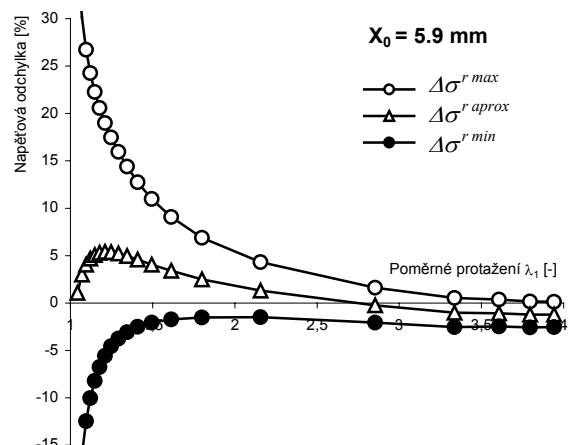
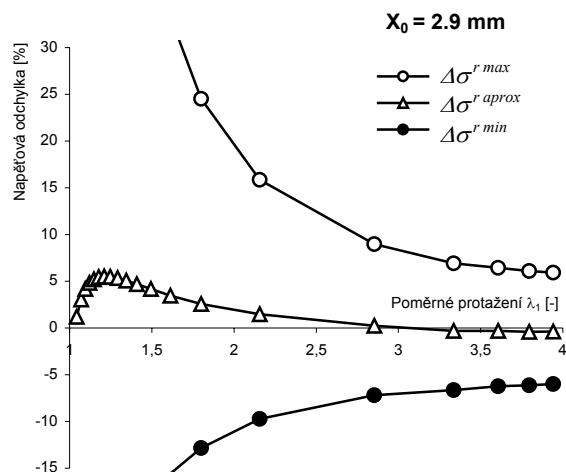
Odchylky $\Delta\sigma^{r\ min}$, $\Delta\sigma^{r\ max}$ tedy vymezují interval odchylek ($\Delta\sigma^{r\ min}$, $\Delta\sigma^{r\ max}$) v určení napětí zahrnujících jak odchylky v důsledku nesplnění membránových předpokladů (kap.3.1), tak i odchylky v důsledku nepřesnosti v určování poloměru křivosti r . Hodnota $\Delta\sigma^{r\ aprox}$ vyjadřuje odchylku v určení napětí při absolutně přesném ($\Delta=0$) určování polohy bodů A , B , C .

S ohledem na plánované využití digitálního obrazu deformovaného vzorku byla zvolena hodnota nepřesnosti měření $\Delta=0.03mm$. Tato hodnota řádově odpovídá očekávané nepřesnosti v lokalizaci značek A , B , C v obrazu o velikosti $100 \times 75mm$ při rozlišení 1600×1200 obrazových bodů. Výsledné hodnoty $\Delta\sigma^{r\ aprox}$, $\Delta\sigma^{r\ min}$, $\Delta\sigma^{r\ max}$ jsou v závislosti na poměrném protažení λ_1 vyneseny v grafech na obr. 12 pro různé varianty počáteční vzdálenosti x_0 bodů A , B (resp. A , C).

Z výsledků analýzy obr. 12 je zřejmé, že pro variantu $x_0=2.9mm$ nepřevýší sice velikost $\Delta\sigma^{r\ aprox}$ hodnotu 5%, avšak se zahrnutím nepřesnosti měření $\Delta(0.03mm)$ lze očekávat i celkovou odchylku v určení napětí o velikosti řádově desítek %. Pro variantu s největší analyzovanou velikostí $x_0=24.9mm$ roste odchylka $\Delta\sigma^{r\ aprox}$ v závěrečné fázi zkoušky k absolutní hodnotě o velikosti řádově desítek %, tedy i pro absolutně přesné měření ($\Delta=0$) polohy bodů A , B , C lze očekávat podstatné odchylky v určení napětí, způsobené aproximací poloměru křivosti vzorku r hodnotou r_{aprox} na příliš velké základně $B-A-C$; vliv nepřesnosti měření Δ je zde nepodstatný. „Kompromisní“ varianta $x_0=12.7mm$ vykazuje uspokojivé výsledky, neboť v celém analyzovaném rozsahu deformace nepřevýší velikost odchylky v určení napětí hodnotu $\pm 8\%$. Z tohoto důvodu se varianta $x_0=12.7mm$ jeví jako nejlepší ze všech analyzovaných variant, optimální hodnotu x_0 lze očekávat v rozmezí 10 až 15 mm.

Pozn. Pro potřeby zvýšené přesnosti v určení napětí je vhodné v první fázi zkoušky ($\lambda_1 < 2.0$) využívat pro měření polohy bodů A , B , C varianty $x_0=24.9mm$, v druhé fázi zkoušky ($\lambda_1 > 2.0$) je naopak vhodné využívat varianty $x_0=9.2mm$, čímž dojde ke snížení odchylek v určení napětí pod úroveň 5% na celém analyzovaném rozsahu deformace. Skutečná velikost odchylek v určení napětí je navíc ve smyslu poznámky¹ ještě menší než uvedené hodnoty.

¹ Intervalu poloměrů křivosti (r_{min} , r_{max}) je přiřazen příslušný interval napětí ($\sigma^{r\ min}$, $\sigma^{r\ max}$). Závislost (5) napětí na poloměru křivosti však nemá vůči proměnné r monotónní charakter (rostoucí / klesající). Exaktní vyšetření hraničních hodnot intervalu napětí by proto vyžadovalo analýzu extrémů pro konkrétní hodnoty ostatních parametrů (p , E , t) v jednotlivých zátěžných stavech. Pro výpočetní jednoduchost byly hraniční hodnoty intervalu napětí ($\sigma^{r\ min}$, $\sigma^{r\ max}$) spočteny dle vztahů (9), které vedou k větší šířce výsledného intervalu ($\sigma^{r\ min}$, $\sigma^{r\ max}$), a tím k větší šířce intervalu odchylek napětí ($\Delta\sigma^{r\ min}$, $\Delta\sigma^{r\ max}$) než odpovídá skutečnosti.



obr. 12 Průběh odchylek v určení napětí $\Delta\sigma^{r \text{ aprox}}$, $\Delta\sigma^{r \min}$, $\Delta\sigma^{r \max}$ v závislosti na poměrném protažení λ_1 pro jednotlivé varianty x_0

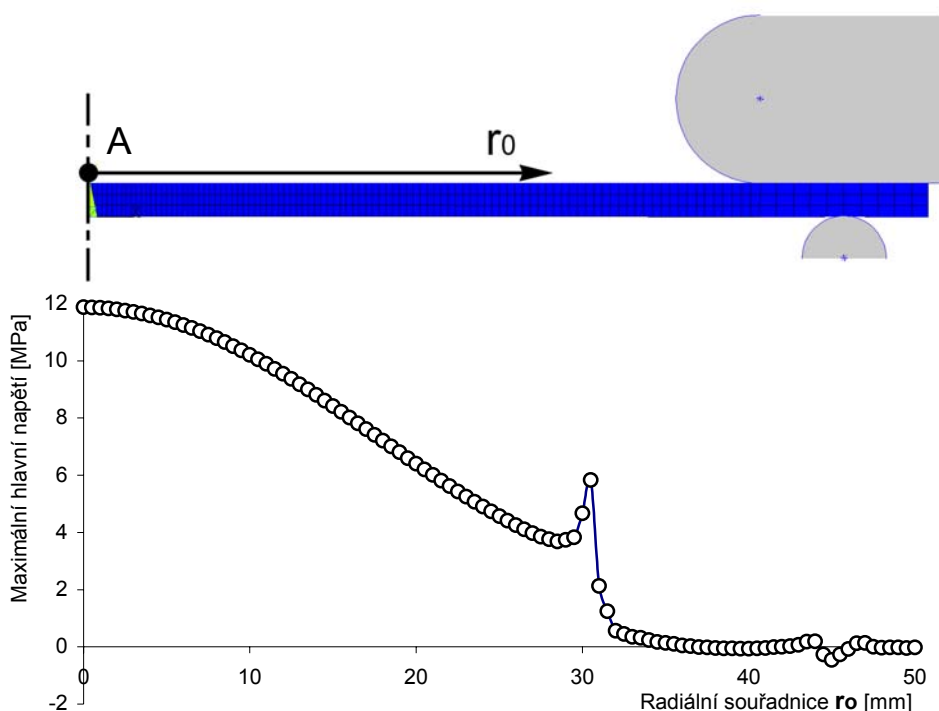
3.3 Analýza odchylek v určování napětí v důsledku nepřesnosti měření ostatních veličin

Odchyšky napětí určeného dosazením rov. (3), (1) do rov. (5) od skutečné hodnoty jsou také odvislé od přesnosti měření tlaku p , počáteční tloušťky vzorku t_0 a poměrného protažení λ_1 . Metodiky měření těchto veličin jsou známé a běžně ve zkušebnictví používané, proto nejsou dále detailně analyzovány. Na základě rozboru jejich přesností lze považovat extrémní velikost celkové odchylky určeného napětí v důsledku nepřesnosti měření veličin p , t_0 , λ_1 (dohromady) o velikosti $\pm 3\%$ za snadno dosažitelnou.

4 Analýza možnosti měření dvouosé pevnosti

Pro následující analýzu byly využity výsledky výpočtové simulace z kap. 3.2. Tato simulace byla provedena až do takové míry deformace pryžového vzorku, která prakticky odpovídá (dle zkušeností autorů) jeho porušení ($\lambda_{1\max} \sim 4.0$).

Zatímco u standardních biaxiálních zkoušek (např. dle obr. 4) lze očekávat komplikace při určování mezních hodnot napětí a přetvoření, a to v podobě nežádoucích napěťových extrémů v blízkosti míst upnutí vzorku, v případě analyzované zkoušky se rozhodující napěťový extrém nachází na ose symetrie vzorku – v bodě A (viz. obr. 13). Lze tedy očekávat, že k porušení vzorku dojde právě v blízkosti bodu A , tj. v místě, kde je rovnoměrná dvouosá napjatost, a kde je v průběhu zkoušky monitorována velikost přetvoření i napětí. Analýza napjatosti vzorku v závěrečné fázi výpočtové simulace tím potvrzuje vhodnost analyzované zkoušky k měření biaxiální pevnosti elastomerů.



obr. 13 Průběh maximálního hlavního napětí pro $p=0.05\text{MPa}$ ($\lambda_1=4.0$) na horní straně vzorku v závislosti na radiální souřadnici r_0 jeho nedeformované geometrie

5 Shrnutí a závěr

Byla analyzována zkušební metoda pro měření dvouosé napětově deformační charakteristiky elastomerů. Základní výhodou této metody je snadný a na přístrojové vybavení nenáročný způsob realizace stavu rovnoměrné dvouosé napjatosti v konkrétním místě vzorku. Metoda navíc umožňuje měření dvouosé pevnosti. Je omezena na měření napětí a deformace při rovnoměrné dvouosé napjatosti izotropních materiálů, které jsou dostatečně poddajné a před vlastním porušením podléhají velmi velkým deformacím řádu stovek procent (např. technická pryž).

Kromě samotného přípravku vyžaduje analyzovaná metoda zdroj tlakového media (vzduch), měření jeho tlaku p a měření deformace povrchu vzorku – tj. poměrného protažení λ_l a poloměru křivosti r . Na základě měřených veličin lze snadno dopočítat hodnotu napětí, která je potřebná pro určení výsledné napětově deformační charakteristiky.

Pro vyhodnocení poloměru křivosti r je uvažována metoda využívající analýzu obrazu deformovaného tvaru vzorku. Výsledky analýz zkoumajících vliv nedodržení membránových předpokladů a vliv nepřesností v měření jednotlivých veličin na přesnost určení napětí ukazují, že lze očekávat celkovou odchylku v určování napětí **menší než 10%**.

Provedené úvodní experimenty, jejichž výsledky však nejsou součástí příspěvku, potvrzují všechny závěry plynoucí z předkládaného výpočtového modelování.

Poděkování: Práce byla provedena v rámci Výzkumného záměru

MŠMT ČR č. CEZ: 322/98:262100001

Literatura

- [1] Skácel, P., Burša, J. “Analýza vlivu tření na deformaci pryžového vzorku při zkoušce jednoosým tlakem”, Proc. of EAN 2002, Prague, June 2002
- [2] Treloar, L.R.G. Trans. Faraday Soc. 40, 56, 1944
- [3] Ogden, R.W. “Large Deformation Isotropic Elasticity: On The Correlation of Theory and Experiment for Incompressible Rubberlike Solids”, Proceedings of the Royal Society, Vol. A (326), pp. 565-584, 1972
- [4] Arruda, E.M., Boyce, M.C. “A Three-dimensional Constitutive Model for the Large Stretch Behavior of Rubber Elastic Materials”, J. Mech. Phys. Solids., 41, pp. 389-412., 1993
- [5] Day, J., Miller, K. “Equibiaxial Stretching of Elastomeric Sheets, An Analytical Verification of Experimental Technique”, Axel Products, Inc., 2000, <http://www.axelproducts.com/pages/Downloads.html>
- [6] “Compression or Biaxial Extension”, Axel Products, Inc., 2000, <http://www.axelproducts.com/pages/Downloads.html>
- [7] Miller, K. “Testing Elastomers for Hyperelastic Material Models in Finite Element Analysis”, Axel Products, Inc., 2000, <http://www.axelproducts.com/pages/Downloads.html>
- [8] Chevalier, L., Calloch, S., Hild, F., Marco, Y. “ Digital image correlation used to analyze the multiaxial behavior of rubber-like materials”, J. Mech. A/Solids 20, pp. 169–187, 2001