

# EXPERIMENTAL STRESS ANALYSIS IN THE RANGE OF ELASTIC-PLASTIC STRAINS

## EXPERIMENTÁLNÍ ANALÝZA NAPĚTÍ V OBLASTI PRUŽNO-PLASTICKÝCH DEFORMACÍ

**Zdeněk Kuliš, Jan Řezníček**

*Experimental stress analysis in the plastic range is very important by using materials with high deformations possibilities as steel X 60, which is used in the gas pipe lines. This paper due to theoretical base of solving elastic-plastic strains. Here is defined the stress-function  $\phi$  and equations used by solving experimental strains in elastic-plastic and plastic range.*

V oblasti lineárních elastických deformací je závislost mezi tenzorem napětí  $\sigma_{rs}$  a tenzorem poměrných deformací  $\varepsilon_{rs}$  dána **Hookéovým zákonem**

$$\varepsilon_{rs} = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \left[ \sigma_{rs} - \delta_{rs} \cdot \sigma_{ij} \cdot \frac{\mu_e}{1 + \mu_e} \right] \quad (1)$$

přičemž

$$\sigma_{ij} = \frac{2 \cdot G \cdot (1 + \mu_e)}{1 - 2 \cdot \mu_e} \cdot \varepsilon_{ij} \quad (2)$$

kde:  $G$  - modul pružnosti ve smyku

$\mu_e$  - Poissonovo číslo

$\delta_{rs}$  - Kroneckerovo delta

$\sigma_{ij}$  - první invariant tenzoru napětí

$\varepsilon_{ij}$  - první invariant tenzoru poměrných deformací

Dále plyne

$$\sigma_{rs} = 2 \cdot G \cdot \left[ \varepsilon_{rs} + \delta_{rs} \cdot \frac{\mu_e}{1 - 2 \cdot \mu_e} \cdot \varepsilon_{ij} \right] \quad (3)$$

Pro rovinnou napjatost, kdy např.  $\sigma_{33} = 0$ , je

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\mu_e}{1-\mu_e} \cdot (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (4)$$

a

$$\varepsilon_{jj} = \frac{1-2\cdot\mu_e}{1-\mu_e} \cdot (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (5)$$

Hlavní napětí  $\sigma_{11}$  a  $\sigma_{22}$  jsou tedy rovna

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_{11} + \mu_e \cdot \varepsilon_{22}) \quad (6)$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_{22} + \mu_e \cdot \varepsilon_{11}) \quad (7)$$

V oblasti pružno-plastických deformací lze pro závislost napětí a poměrných deformací užít různé teorie plasticity. V případě prostého zatěžování a aktivní deformace je vhodná teorie malých pružno-plastických deformací, podle níž plyne

$$\varepsilon_{rs} = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \left[ \sigma_{rs} - \delta_{rs} \cdot \sigma_{jj} \cdot \frac{\mu_e}{1+\mu_e} \right] + \frac{\varphi}{2 \cdot G} \cdot \left[ \sigma_{rs} - \frac{1}{3} \cdot \delta_{rs} \cdot \sigma_{jj} \right] \quad (8)$$

kde pro funkci plasticity  $\varphi$  platí

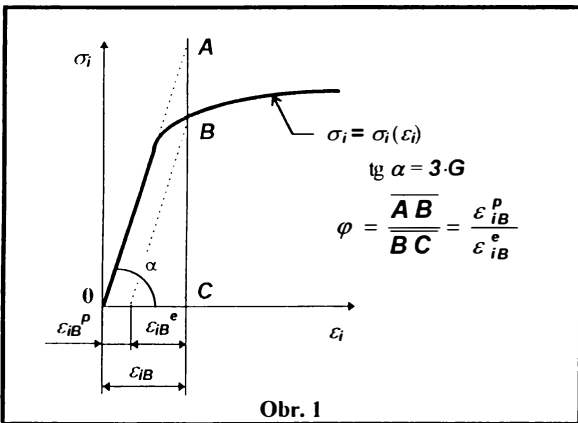
$$\varphi = \frac{3 \cdot G \cdot \varepsilon_i}{\sigma_i} - 1 \quad (9)$$

příčemž intenzita napětí  $\sigma_i$  je rovna

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2} \quad (10)$$

a intenzita deformací  $\varepsilon_i$  je

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2} \quad (11)$$



Obr. 1

V diagramu  $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$  udává funkce plasticity poměr mezi intenzitou plastických a elastických poměrných deformací, tj. (obr. 1)

$$\varphi = \frac{\varepsilon_i^p}{\varepsilon_i^e} \quad (12)$$

Jsou-li deformace pružno-plastické, plyne pro rovinnou napjatost

$$\sigma_{11} = \left[ \varepsilon_{11} + \frac{2 \cdot \mu_e + c \cdot \varphi}{2 \cdot (1 + c \cdot \varphi)} \cdot \varepsilon_{22} \right] \cdot H \quad (13)$$

$$\sigma_{22} = \left[ \varepsilon_{22} + \frac{2 \cdot \mu_e + c \cdot \varphi}{2 \cdot (1 + c \cdot \varphi)} \cdot \varepsilon_{11} \right] \cdot H \quad (14)$$

kde

$$c = \frac{2}{3} \cdot (1 + \mu_e) \quad (15)$$

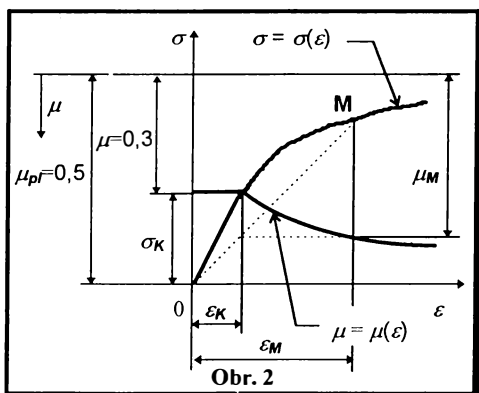
a

$$H = \frac{E \cdot (1 + c \cdot \varphi)}{1 - \mu_e^2 + c \cdot \varphi \cdot (2 - \mu_e) + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c \cdot \varphi \right)^2} \quad (16)$$

K určení hodnoty funkce plasticity  $\varphi$  je při známém diagramu  $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$  třeba znát velikosti všech tří hlavních poměrných deformací  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{33}$ , z nichž však z experimentální analýzy při rovinné napjatosti jsou známy jen  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ . Jsou-li deformace takové, že lze zanedbat pružnou objemovou změnu  $\varepsilon_{ii}$  vůči deformacím plastickým, plyne ze (4) pro  $\mu = 1/2$  (třebaže  $\mu$  je Poissonovo číslo, tedy elastická konstanta, ponechme i nadále označení  $\mu$  pro absolutní hodnotu poměru příčné a podélné poměrné deformace při jednoosé napjatosti)

$$\varepsilon_{33} = -(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (17)$$

Závislost  $\mu$  na  $\varepsilon_{11}$  není při plastických deformacích charakterizována skokovou změnou, plyne pro ni



$$\mu = \frac{1}{2} - \frac{1 - 2 \cdot \mu_e}{2 \cdot E} \cdot \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} \quad (18)$$

kde  $\mu_e$  je Poissonovo číslo (elastická konstanta). Vztah (18) lze interpretovat graficky (obr. 2).

Obecně lze třetí hlavní poměrnou deformaci  $\varepsilon_{33}$  vyjádřit

$$\varepsilon_{33} = -F(\mu_e, \varphi) \cdot (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (19)$$

kde funkce  $F(\mu_e, \varphi)$ , závislá na materiálu a stupni deformace, má tvar

$$F(\mu_e, \varphi) = \frac{\varphi + 3 \cdot \frac{\mu_e}{1 + \mu_e}}{\varphi + 3 \cdot \frac{1 - \mu_e}{1 + \mu_e}} \quad (20)$$

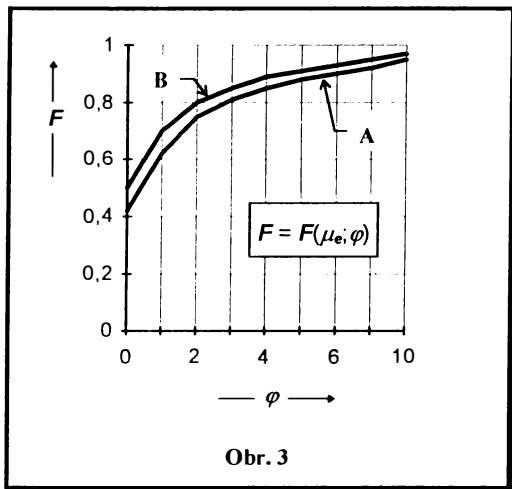
a intenzita poměrných deformací je rovna

$$\varepsilon_i = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{A} \cdot \sqrt{\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{11} \cdot \varepsilon_{22} \cdot \frac{2 \cdot A - 3}{A} + \varepsilon_{22}^2}$$

kde

$$A = F^2 + F + 1$$

Průběh funkce  $F(\mu_e, \varphi)$  pro ocel **A** ( $\mu_e = 0,3$ ) a Al slitinu **B** ( $\mu_e = 0,33$ ) je na obr. 3.



Obr. 3

V elastickém stavu ( $\varphi = 0$ ) je  $F = \frac{\mu_e}{1 - \mu_e}$

Pro  $\varphi \rightarrow \infty$  je  $F \rightarrow 1$

K účelu vyhodnocení pružno-plastické napjatosti zavedeme nejprve poměrné veličiny

$$\xi = \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}, \quad \varepsilon_{11} > \varepsilon_{22}$$

$$\eta = \frac{\varepsilon_i}{|\varepsilon_{11}|} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{A} \cdot \sqrt{1 + \xi \cdot \frac{2 \cdot A - 3}{A} + \xi^2}$$

$$\bar{\eta} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 + \xi + \xi^2}$$

$$\bar{\varepsilon}_i = |\varepsilon_{11}| \cdot \bar{\eta}$$

kde hodnoty, označené pruhem, se

vzta-hují k rozvitým plastickým deformacím (tj.  $\mu \rightarrow 1/2$ ). Potom je

$$\varepsilon_i = \frac{\eta}{\bar{\eta}} \cdot \bar{\eta} \cdot |\varepsilon_{11}|$$

přičemž hodnota poměru  $\eta/\bar{\eta}$  závisí na  $\xi$  a  $\varphi$ , velikost  $\varphi$  závisí na  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{33}$  a není ji možno předem zjistit, její krajní meze jsou  $0 \leq \varphi \leq \infty$ , pro tyto krajní meze určíme dle (20) meze funkce  $F$ :

$$\frac{\mu_e}{1 - \mu_e} \leq F \leq 1$$

a funkci **B**, kde

$$B = \frac{1}{3} \cdot [(F+1)^2 - F]$$

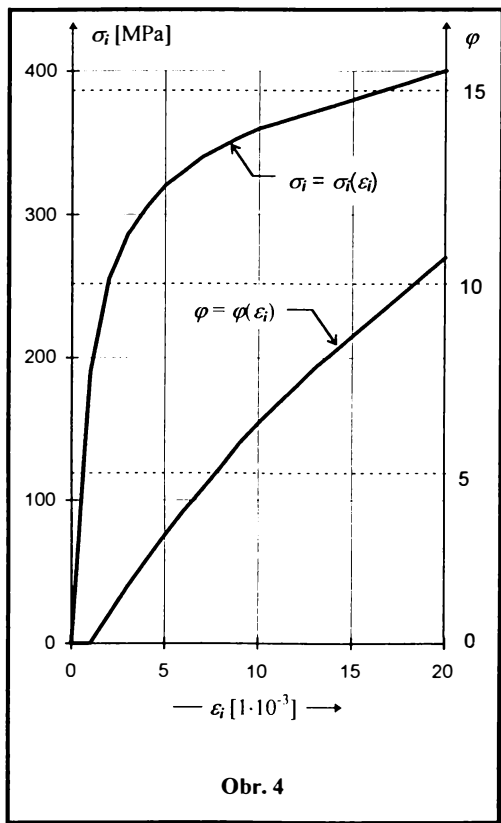
Poměr  $\eta/\bar{\eta}$  je roven

$$\eta/\bar{\eta} = \sqrt{\frac{\frac{B \cdot (\xi - 1)^2}{\xi} - 1}{\frac{(\xi - 1)^2}{\xi} - 1}}$$

a tedy

$$(\eta/\bar{\eta})_{\varphi=0} \cdot \bar{\eta} \cdot |\varepsilon_{11}| \leq \varepsilon_i \leq (\eta/\bar{\eta})_{\varphi \rightarrow \infty} \cdot \bar{\eta} \cdot |\varepsilon_{11}|$$

Pro meze  $\varepsilon_i$  určíme z diagramu  $\varphi = \varphi(\varepsilon_i)$  odpovídající meze funkce plasticity. Postupnými aproximacemi se dobereme výsledku odpovídající přesnosti. Poté lze ze (13) a (14) stanovit napětí.



Obr. 4

Metodu otestujeme na příkladu, kdy u materiálu s modulem pružnosti  $E = 2 \cdot 10^5$  MPa, a  $\mu_e = 0,3$  (pracovní diagram materiálu  $\sigma = \sigma(\varepsilon_i)$  a  $\varphi = \varphi(\varepsilon_i)$  je na obr.4), byly experimentálně naměřeny hodnoty  $\varepsilon_{11} = 140 \cdot 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_{22} = 14 \cdot 10^{-4}$ . Aplikací výše uvedeného postupu plyne, je-li závislost  $\varphi = \varphi(\varepsilon_i)$  popsána přibližně (pro  $r = 0,96$ )

$$\varphi = 22,95 + 3,507 \cdot \ln \varepsilon_i$$

pro 1. a 2. aproximaci a  $\xi = 0,1$ ;  $\bar{\eta} = 1,216$  a  $\bar{\varepsilon}_i = 17031,7 \cdot 10^{-6}$ ; (viz tabulka 1)

S vyhovující přesností lze tedy položit  $\varphi = 8,48$ . Ze vztahu (9) plyne pro intenzitu napětí

$$\sigma_i = \frac{3 \cdot G \cdot \varepsilon_i}{1 + \varphi} = \frac{3 \cdot E}{2 \cdot (1 + \mu_e)} \cdot \frac{\varepsilon_i}{1 + \varphi}$$

což je v daném případě rovno  $\sigma_i = 392,9$  MPa.

Užitím (13) až (16) stanovíme napětí  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ .

Po dosazení je

$$\sigma_{11} = \varepsilon_{11} \cdot [1 + D \cdot \xi] \cdot H$$

$$\sigma_{22} = \varepsilon_{22} \cdot [\xi + D] \cdot H$$

$$D = \frac{2 \cdot \mu_e + c \cdot \varphi}{2 \cdot (1 + c \cdot \varphi)}$$

Tab. 1

| $\xi = 0,1$               | 1. aproximace         |                              | 2. aproximace           |                         |
|---------------------------|-----------------------|------------------------------|-------------------------|-------------------------|
|                           | $\varphi = 0$         | $\varphi \rightarrow \infty$ | $\varphi = 7,41$        | $\varphi = 8,66$        |
| $F$                       | 0,429                 | 1                            | 0,898                   | 0,910                   |
| $B$                       | 0,537                 | 1                            | 0,901                   | 0,913                   |
| $\eta/\bar{\eta}$         | 0,704                 | 1                            | 0,945                   | 0,951                   |
| $\varepsilon_i$           | $11917 \cdot 10^{-6}$ | $17024 \cdot 10^{-6}$        | $16087,7 \cdot 10^{-6}$ | $16189,8 \cdot 10^{-6}$ |
| $\varphi$                 | 7,41                  | 8,66                         | 8,47                    | 8,49                    |
| $\varphi_{k+1}/\varphi_k$ | 1,167                 |                              | 1,002                   |                         |

čili

$$\sigma_{11} = 454,3 \text{ MPa} ; \sigma_{22} = 249,8 \text{ MPa}$$

Pro kontrolu určíme z těchto hodnot velikost  $\sigma_i$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_{11}^2 - \sigma_{11} \cdot \sigma_{22} + \sigma_{22}^2} = 394,1 \text{ MPa}$$

což vcelku dobře souhlasí s předcházejícím.

Naznačená metodika vyhodnocování byla použita např. při experimentální analýze napjatosti reálných korozních vad Transitzního plynovodu. Použitý materiál - ocel X 60 - se vyznačuje značnými plastickými schopnostmi ( $\sigma_{K02} \approx 380 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{Pt} \approx 600 \text{ MPa}$  a  $\delta \approx 15-18\%$ ). Při použití tenzometrických růžic HBM série Y bylo možno měřit poměrná prodloužení v místech korozních důlků až do 5% a při sestavení růžice z jednotlivých tenzometrů třídy LD až do 20% (tento stav nikdy nenastal - maximálně bylo v místech tenzometrů naměřeno cca 10%). Podle postupu uvedeného v tomto příspěvku byl vytvořen program **SIGMA.EXE**, který z naměřených poměrných prodloužení počítá hlavní a redukované napětí v celém elastickém a elasticko-plastickém rozsahu.

Při aplikace programu **SIGMA.EXE** na data získaná měřením reálné korozní vady bylo dosaženo uspokojivé shody mezi experimentálními výsledky a numerickou analýzou (MKP).

## Literatura:

- [1] MALININ,N.,N.: *Příkladná teorie plasticity i polzučestí*, Mašinostrojenije, Moskva 1968
- [2] KULIŠ,Z.: *Předpoklad nestlačitelnosti v oblasti malých pružně plastických deformací*, Zpravodaj VZLÚ Praha 2(122), Praha 1977
- [3] VALENTA,F. a řešitelský kolektiv: *Teoretická a experimentální analýza napětí v reálných korozních vadách dálkových plynovodů*, VZ FS ČVUT 211-94-12, Praha 1994



**Doc. ing. Zdeněk Kuliš, CSc., ing. Jan Řezníček, CSc.**

katedra pružnosti a pevnosti, strojní fakulta, ČVUT v Praze

Technická 4, 166 07 Praha 6 - Dejvice

telefon: (02) 2435 2509 a 2435 2517

E-mail: reznicek@fsid.cvut.cz

Praha, květen 1995