VLIV ODMĚRNÉ DÉLKY PŘI MĚŘENÍ NÁHODNĚ PROMĚNNÝCH VELIČIN

Ing. Milan Holický, CSc.

Stavební ústav ČVUT, Praha

Anotace

Nahrazením lokálních hodnot náhodně proměnné veličiny průměrnými hodnotami, stanovenými na určité odměrné délce v okolí měřeného bodu vzniká metodická chyba experimentálního měření. Velikost této chyby je odvozena teoreticky za předpokladu, že sledovaná veličina je popsána stacionární náhodnou funkcí, jejíž korelační funkce má tvar exponenciály, popř. součinu exponenciály a kosínové funkce. Použité základní typy korelačních funkcí, které odpovídají necyklickým, popř. cyklickým veličinám, závisejí na parametru α , který vystihuje rychlost poklesu korelační funkce a parametru β , který odpovídá frekvenci cyklických veličin. Statistické charakteristiky /střední hodnota, korelační funkce a rozptyl/ měřených hodnot jsou v rámci korelační teorie náhodných funkcí odvozeny na základě charakteristik původní sledované veličiny. Ukazuje se, že velikost metodické chyby je výrazně závislá na součinu odměrné délky a parametru α , popř. na součinu odměrné délky a parametru β . Odvozené výsledky umožňují racionálním způsobem zvolit odměrnou délku v závislosti na hodnotách parametrů α a β , které charakterizují průběh korelační funkce původní sledované veličiny.

1. Úvod

Experimentální praxe se často setkává s požadavkem měřit lokální /místní nebo časové/ hodnoty proměnných veličin, které jsou závislé na nenáhodném parametru - souřadnici bodu nebo časovém okamžiku. Takovou veličinou je např. přetvoření, modul pružnosti a rychlost. Dostupné experimentální metody však zpravidla umožňují stanovit pouze průměrnou, popř. integrální hodnotu sledované veličiny na určitém intervalu. Velikost tohoto intervalu se nazývá odměrná délka.

Je zřejmé, že takto naměřené průměrné hodnoty proměnné veličiny se mohou v závislosti na velikosti odměrné délky značně lišit od lokálních hodnot. Přitom je často stanovení dostatečně přesného průběhu lokálních hodnot velmi důležité pro správný a výstižný popis vyšetřovaného fyzikálního jevu. Do popředí experimentální práce se pak dostává naléhavá otázka stanovení metodické chyby měření, která vznikne nahrazením hledaných lokálních hodnot sledované veličiny průměrnými hodnotami. Tato metodická chyba vzniká např. při tenzometrickém měření poměrného přetvoření, při stanovení modulu pružnosti ultrazvukem apod.

Ne vždy je však předmětem experimentální práce stanovit podrobný průběh lokálních hodnot. Často je postačující stanovit průměrné hodnoty sledované veličiny a pak je účelné při volbě odměrné délky přihlédnout ke struktuře materiálu a k ostatním praktickým podmínkám měření. Otázkou vlivu odměrné délky na variabilitu přetvoření betonu v závislosti na složení kameniva se zabývají např. práce /1/ a /2/. Z experimentálních výsledků je zřejmé, že variabilita experimentálně zjištěných hodnot přetvoření klesá se zvětšujícím se maximálním průměrem zrn kameniva. Lokální výkyvy přetvoření se neuplatní pokud je odměrná délka dostatečně velká, nebo pokud použité kamenivo obsahuje pouze jemné frakce. Příliš velká odměrná délka však může značně zkreslit skutečný průběh přetvoření. Při posouzení vhodnosti určité odměrné délky se tedy obecně střetávají dva protichůdné pohledy. Následující teoretický rozbor má poskytnout podklady pro racionální

zvážení obou hledisek.

Měřené proměnné veličiny mohou být obecně buď deterministickými nebo náhodnými funkcemi nenáhodného parametru. Pokud je znám alespoň typ příslušné deterministické funkce, není stanovení metodické chyby teoreticky obtížné. Často je však skutečný průběh měřené veličiny závislý na řadě neurčitých faktorů a stanovení odpovídající deterministické funkce není možné. V těchto případech je nezbytné se spokojit s matematickým popisem sledované veličiny pomocí vhodného typu náhodné funkce.

V předložené práci je odvozena metodická chyba měření za předpokladu, že závislost sledované veličiny na nenáhodném parametru je matematicky popsána pomocí základních typů stacionárních náhodných funkcí.

2. Lokální a průměrné hodnoty

Měřená veličina X nechť je stacionární náhodnou funkcí nenáhodného parametru t, který označuje buď souřadnici bodu nebo časový okamžik. Formálně zapíšeme sledovanou veličinu ve tvaru funkce $X(t)$, která je matematicky popsána střední hodnotou $\bar{x}$ a korelační funkcí $K_X(t_2 - t_1)$, kde t_1 a t_2 označují hodnoty parametru t. Rozptyl náhodné funkce $X(t)$, který je dán hodnotou korelační funkce $K_X(0)$ označíme symbolem σ_X^2.

Předpokládáme, že výsledná veličina experimentálního měření Y v bodě t je integrálním průměrem funkce $X(t)$ na symetrickém okolí bodu t, jehož délka je Δ:

$$Y(t) = \frac{1}{\Delta} \int_{t-\frac{\Delta}{2}}^{t+\frac{\Delta}{2}} X(\tau)\, d\tau \,. \qquad (1)$$

Lze ukázat /3/, že měřená integrální veličina $Y(t)$ je rovněž stacionární náhodnou funkcí. Odvodíme její charakteristiky $\bar{y}$ a korelační funkci $K_Y(t_2 - t_1)$, popř.

rozptyl $\sigma_y^2(t)$ na základě obdobných charakteristik původní veličiny, tj. funkce $X(t)$.

Poznamenejme, že následující postup lze bez obtíží zobecnit i pro nestacionární náhodnou funkci $X(t)$, kterou lze vyjádřit pomocí stacionární funkce $Z(t)$ a vhodných deterministických funkcí $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ na základě vztahu

$$X(t) = \varphi(t)\, Z(t) + \psi(t) \quad . \tag{2}$$

Pokud však odměrná délka Δ není příliš velká, lze funkci $X(t)$ pokládat v tomto intervalu přibližně za stacionární. Její střední hodnotu a korelační funkci lze pak aproximovat na základě vztahů

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \varphi(t')\,\bar{z} + \psi(t') \quad , \\ K_x(t_2 - t_1) &= \varphi^2(t')\, K_z(t_2 - t_1) \quad . \end{aligned} \tag{3}$$

kde t' označuje střed intervalu Δ a $\bar{z}$, popř. $K_z(t_2 - t_1)$ je střední hodnota, popř. korelační funkce stacionární náhodné funkce $Z(t)$. Rozptyl σ_x^2 funkce $X(t)$ v intervalu Δ je tedy aproximován hodnotou

$$\sigma_x^2 = \varphi^2(t')\, \sigma_z^2 \quad . \tag{4}$$

Střední hodnota funkce $Y(t)$, definované výrazem (1), je dána /3/ vztahem :

$$\bar{y} = \frac{1}{\Delta} \int_{t - \frac{\Delta}{2}}^{t + \frac{\Delta}{2}} \bar{x}\, d\tau = \bar{x} \tag{5}$$

a je tedy shodná se střední hodnotou funkce $X(t)$. Pro korelační funkci $K_y(t_2 - t_1)$ platí /3/ vztah :

$$K_y(t_2 - t_1) = \frac{1}{\Delta^2} \int_{t_1 - \frac{\Delta}{2}}^{t_1 - \frac{\Delta}{2}} \int_{t_2 - \frac{\Delta}{2}}^{t_2 - \frac{\Delta}{2}} K_x(\tau_2 - \tau_1)\, d\tau_1\, d\tau_2 \quad . \tag{6}$$

Rozptyl σ_y^2 je roven hodnotě korelační funkce $K_y(t_2 - t_1)$

pro $t_2 = t_1 = t$, tj.

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{\Delta^2} \int_{t-\frac{\Delta}{2}}^{t+\frac{\Delta}{2}} \int_{t-\frac{\Delta}{2}}^{t+\frac{\Delta}{2}} K_X(\tau_2 - \tau_1)\, d\tau_1 d\tau_2 \,. \qquad (7)$$

Při stanovení metodické chyby budeme vycházet z hodnoty rozptylu σ_y^2 stanoveného ze vzorce (7). Integrace na pravé straně tohoto vzorce je však možná pouze za předpokladu, že známe korelační funkci $K_X(t_2 - t_1)$, která musí být stanovena z experimentálních dat pro sledovanou veličinu $X(t)$. V dalších oddílech provedeme vyčíslení vzorce pro dva základní typy korelační funkce, které se běžně užívají pro necyklické a cyklické veličiny.

3. Necyklické veličiny

Veličiny, u kterých se neprojevuje periodické kolísání hodnot nazveme necyklické veličiny. Korelační funkce pro tyto veličiny může mít rozličný tvar. Z běžně užívaných typů uvažujeme v dalším vyšetřování korelační funkci ve tvaru

$$K_X(t_2 - t_1) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|t_2 - t_1|} \,. \qquad (8)$$

Průběh této korelační funkce je závislý na kladném parametru α , který popisuje stupeň vzájemné závislosti hodnot náhodné funkce $X(t)$ ve dvou různých bodech. Parametr α se často vyjadřuje pomocí tzv. korelační vzdálenosti. Nechť koeficient korelace veličin $X(t_1)$ a $X(t_2)$ v bodech t_1 a t_2 klesne na hodnotu 0,05. Je to hodnota, při které se zpravidla náhodné proměnné $X(t_1)$ a $X(t_2)$ považují za vzájemně nezávislé a vzdálenost $|t_2 - t_1|$ se pak označuje jako korelační vzdálenost θ náhodné funkce $X(t)$. Pro korelační funkci (8) platí mezi parametrem α a korelační vzdáleností θ následující vztah :

$$\alpha \doteq 3/\theta \,. \qquad (9)$$

Dokonalá závislost náhodných veličin $X(t_1)$ a $X(t_2)$ odpovídá hodnotě $\alpha = 0$ a $\theta \longrightarrow \infty$. V tomto případě je korelační funkce (8) identicky rovna rozptylu σ_x^2. Při klesající závislosti hodnota parametru α roste, korelační vzdálenost θ klesá. V krajním případě, kdy $\alpha \longrightarrow \infty$ je korelační vzdálenost $\theta = 0$, jsou náhodné veličiny $X(t_1)$ a $X(t_2)$ pro libovolné $t_1 \neq t_2$ nezávislé.

Integrací vzorce (7) po dosazení korelační funkce (8) lze odvodit vztah pro rozptyl σ_y^2 ve tvaru

$$\sigma_y^2 = \frac{2\sigma_x^2}{\alpha\Delta}\left(1 + \frac{e^{-\alpha\Delta} - 1}{\alpha\Delta}\right). \qquad (10)$$

Poměr směrodatných odchylek σ_y / σ_x je tedy dán vzorcem

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \sqrt{\frac{2}{\alpha\Delta}\left(1 + \frac{e^{-\alpha\Delta} - 1}{\alpha\Delta}\right)}. \qquad (11)$$

Závislost poměru σ_y / σ_x na součinu $\alpha\Delta$ je graficky zachycena na obr. 1; je to křivka, pro kterou $\beta\Delta = 0$ /viz následující oddíl 4/. Pokud je odměrná délka Δ velmi malá, směrodatné odchylky se příliš neliší; pro $\Delta \longrightarrow 0$ platí, že $\sigma_y \longrightarrow \sigma_x$. Se zvětšující se hodnotou součinu odměrné délky Δ s parametrem α klesá hodnota podílu σ_y / σ_x. Je-li např. $\Delta = \theta$, tj. odměrná délka je rovna korelační vzdálenosti a součin $\alpha\Delta = 3$ /viz rovnice (9)/ je poměr $\sigma_y / \sigma_x \doteq 0{,}68$ a experimentálně zjištěné průměrné hodnoty $Y(t)$ tedy značně zkreslují průběh sledované veličiny $X(t)$.

4. Cyklické veličiny

Proměnné veličiny, jejichž hodnoty mají v závislosti na nenáhodném parametru t periodický charakter, nazveme cyklické veličiny. Z běžně používaných typů uvažujeme jako příklad korelační funkci ve tvaru

$$K_x(t_2 - t_1) = \sigma_x^2 \, e^{-\alpha |t_2 - t_1|} \cos \beta (x_2 - x_1) \, . \qquad (12)$$

Kromě kladného parametru α , jehož význam je analogický jako u funkce (8) , závisí korelační funkce (12) ještě na parametru β . Hodnota tohoto parametru udává periodu korelační funkce (12) a náhodné funkce $X(t)$. Označme θ_p nejčastěji se vyskytující délku periody. Parametr β lze pak určit ze vztahu

$$\beta = \frac{2\pi}{\theta_p} \, . \qquad (13)$$

Poznamenejme, že korelační funkce (12) přechází pro $\beta = 0$ na tvar (8) a je tedy zobecněním předchozího typu korelační funkce.

Po dosazení funkce (12) do vzorce (7) lze integrací a po úpravách dospět ke vztahu

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \left[\frac{2}{\Delta^2(\alpha^2+\beta^2)} \left\{ \alpha\Delta + \frac{e^{-\alpha\Delta}\left[(\alpha^2-\beta^2)\cos\beta\Delta - 2\alpha\beta\sin\beta\Delta\right] - \alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2+\beta^2} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (14)$$

Na obr. 1 je schematicky zachycen vztah (14) pro různé hodnoty $\beta\Delta$ v závislosti a na argumentu $\alpha\Delta$. Pro $\beta\Delta = 0$ přechází vztah (14) na tvar (11) , tj. na poměr σ_y / σ_x pro necyklické veličiny. Poznamenáme, že pro $\alpha\Delta = 0$ se rovnice (14) zjednoduší na tvar

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \sqrt{2 \, \frac{1 - \cos\beta\Delta}{(\beta\Delta)^2}} \, . \qquad (15)$$

Na obr. 2 je poměr σ_y / σ_x podle obecného vztahu (14) vyznačen pro vybrané hodnoty $\alpha\Delta$. Oba grafy lze výhodně použít pro odhad poměru směrodatných odchylek měřené veličiny $Y(t)$ a skutečné veličiny $X(t)$.

5.Metodická chyba měření

Z grafů na obr. 1 a 2 je zřejmé, že směrodatná odchylka σ_y měřených hodnot $Y(t)$ je vždy menší než směrodatná odchylka σ_x veličiny $X(t)$. Měřené hodnoty v jednotlivých bodech t budou mít tedy vždy menší odchylky od střední hodnoty $\bar{y} = \bar{x}$ než skutečné hodnoty. Schematicky je tento poznatek zachycen na obr. 3, kde jsou znázorněny funkce hustoty pravděpodobnosti pro obě náhodné veličiny $X(t)$ a $Y(t)$. Skutečnou hodnotu x veličiny $X(t)$ v určitém bodě t lze odhadnout na základě měřené hodnoty y v témže bodě. Za předpokladu, že obě hodnoty x a y v bodě t odpovídají stejné směrodatné proměnné ξ, tj. že platí

$$y = \bar{y} + \xi\sigma_y , \qquad (16)$$

$$x = \bar{x} + \xi\sigma_x ,$$

lze pro hledanou hodnotu x odvodit vztah

$$x = \bar{y} + (y - \bar{y})\frac{\sigma_x}{\sigma_y} . \qquad (17)$$

Na pravé straně vztahu (17) jsou pouze experimentálně stanovené hodnoty y a $\bar{y}$ a poměr σ_y / σ_x, který lze stanovit na základě grafů na obr. 1 a 2.

Relativní metodická chyba měření $(y - x)/x$ plyne ze vztahu (17) ve tvaru

$$\frac{y - x}{x} = \frac{(y - \bar{y})\left(1 - \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\right)}{\bar{y} + (y - \bar{y})\frac{\sigma_y}{\sigma_x}} . \qquad (18)$$

6.Závěr

Nahrazením lokálních hodnot náhodně proměnné veličiny průměrnými hodnotami, stanovenými na určité odměrné délce v okolí měřeného bodu, vzniká metodická chyba experimentální-

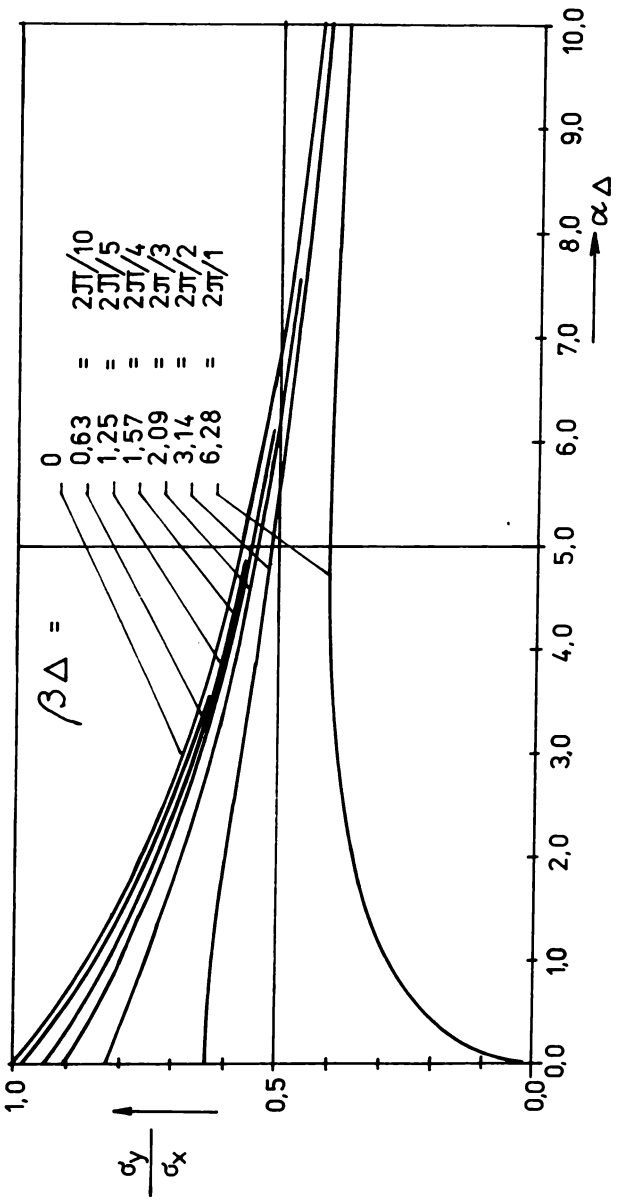
ho měření. Velikost chyby je závislá na odměrné délce a parametrech charakterizující korelační funkci sledované veličiny. Poměr směrodatné odchylky měřených a skutečných hodnot je popsán rovnicí (14) a graficky zachycen na obr. 1 a 2. Skutečnou lokální hodnotu sledované veličiny lze odhadnout z měřené hodnoty na základě vztahu (18) . Relativní metodická chyba měření je dána vzorcem (19) .

Literatura

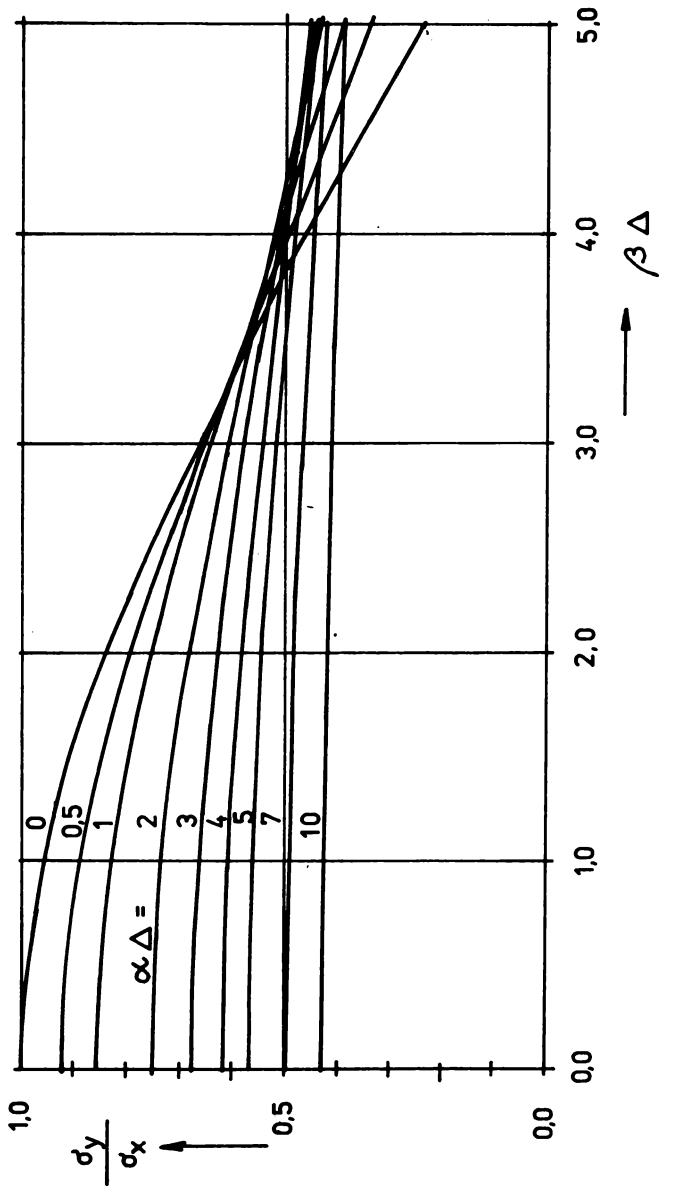
/1/ R.K. Müller:Der Einfluss der Messlänge auf die Ergebnisse bei Dehnungsmessungen an Beton, Beton, 1964/5

/2/ F. Paul:Einfluss der Messlängen von Dehnungsmessstreifen und der Kornzusammensetzung auf die Ergebnisse von Dehnungsmessungen, Bauplanung - Bautechnik, 1968/3

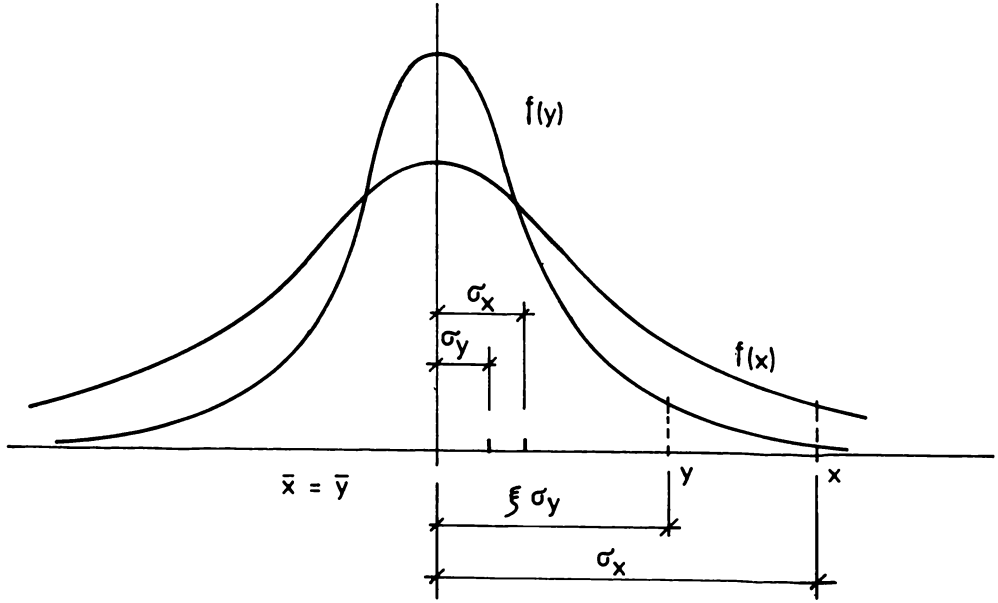
/3/ A.A. Svešnikov:Prikladnyje metody teorii slučajnych funkcij, Nauka, Moskva, 1968



OBR. 1 ZÁVISLOST POMĚRU σ_y/σ_x NA $\alpha\Delta$



OBR. 2 ZÁVISLOST POMĚRU σ_y / σ_x NA $\beta\Delta$



OBR. 3 HUSTOTA PRAVDĚPODOBNOSTI MĚŘENÝCH A SKUTEČNÝCH HODNOT