

VÝPOČET NUMERICKÝCH DERIVÁCIÍ Z EXPERIMENTÁLNE
MERANÝCH ÚDAJOV

Vendelín Szabó

Ústav stavebníctva a architektúry Slovenskej
akadémie vied, Bratislava

Pri spracovávaní výsledkov experimentálnych meraní často vzniká potreba derivovania získaných údajov, nameraných v diskrétnych bodoch nezávisle premennej. Ukázalo sa, že presnosť numerického derivovania takýchto funkčných závislostí možno výrazne zlepšiť zavedením splajnových funkcií. Úloha vedie k systému lineárnych algebraických rovníc s trojdiagonálnou maticou koeficientov, pre riešenie ktorého sa rozpracovala rýchla a efektívna metóda, odstraňujúca invertovanie matice koeficientov. Sú ukázané vzťahy pre praktický výpočet prvých i druhých derivácií pri nerovnomernom a rovnomernom delení uvažovaného intervalu pre prípad, kedy v okrajových uzloch okrem hodnôt funkcie nie sú zadane ďalšie okrajové podmienky. Pri výpočte druhých derivácií na rovnomerne rozdelenom intervale sa poukazuje na podstatné zvýšenie presnosti pri vhodnej voľbe koeficientu.

Ú v o d

Pri riešení mnohých problémov experimentálnej mechaniky, najmä pri vyhodnocovaní meraní pre inžinierske aplikácie vzniká potreba vyjadrenia dimenzačných alebo iných charakteristických veličín ako derivácií experimentálne meranej funkčnej závislosti. Napríklad pri vyšetrovaní tenkých priečne zatažených dosák holograficko-interferenčná metóda umožňuje meranie priehybov s vysokou presnosťou, stavebná prax však vyžaduje určenie ďalších dimenzačných veličín, hlavne ohybových momentov. V praxi používané metódy získavania derivácií experimentálne meraných veličín môžeme rozdeliť do troch skupín:

1. Optické derivovanie, založené na využití javu moiré pri superpozícii dvoch identických interferogramov, vzájomne voči sebe posunutých vo smere derivovania. Táto metóda je však málo presná a vyžaduje husté a kontrastné siete interferenčných čiar.
2. Priame optické metódy merania derivácií posunutí, ktoré sú najúčinnnejšie a najperspektívnejšie, sú však zatiaľ nedostatočne rozpracované.

Optické metódy majú svoje opodstatnenie hlavne vtedy, ak je žiadúce zachovať obrazový, názorný charakter informácie.

3. Numerické metódy derivovania experimentálne meraných údajov. Všeobecne používané postupy, ako zostrojovanie dotyčníc k experimentálnym krivkám a diferenčná technika sú ohraničené na derivácie nízkych rádov, často nie sú dostatočne presné a celkove ich možno charakterizovať ako obtiažne, subjektívne a náročné na čas. Moderné výpočtové metódy, využívajúce počítače umožňujú vyjadrenie experimentálne meraných závislostí pomerne jednoduchým výrazom. K tomuto účelu sa najčastejšie používajú polynómy a ich kombinácie s exponenciálnymi a logaritmickými funkciami. Kým však takéto výrazy dobre interpolujú hľadanú funkciu pri jej derivovaní javia často veľké chyby.

Presnosť numerického derivovania možno výrazne zlepšiť využitím vlastností splajnových funkcií.

Vlastnosti kubických splajnov

Splajnové funkcie sa zaviedli na základe analógie tzv. mechanických "splajnov" [1], používaných kresličmi pre konštruovanie hladkých kriviek, prechádzajúcich danými bodmi. Títo kresličskú pomôcku tvorí dlhá tenká pružná latka, na ktorú sa vo vhodných bodoch zavesujú závažia tak, aby jej ohybová čiara prechádzala danými funkčnými hodnotami. Takýto mechanický splajn pôsobí ako analogový počítač klasického Bernoulli-Eulerovho vzťahu. Matematický splajn potom možno chápať ako približné vyjadrenie ohybovej čiary nosníka časťami kubických parabol medzi dvojicami podpôr.

Budeme sa zaoberať kubickými splajnami, ktoré definujeme nasledovným spôsobom:

Nech na množine reálnych diskrétnych hodnôt nezávisle premennej x_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n \quad (1)$$

je ku každej hodnote x_i priradená reálna funkčná hodnota z_i

$$z_i = f(x_i). \quad (2)$$

Kubický splajn s uzlami v bodoch x_i je funkcia definovaná v celom intervale $\langle x_1, x_n \rangle$, pričom

1. V každom podintervale $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ je daná kubickým polynómom

$$f(x) = a_i^{(1)} + a_i^{(2)}(x_i - x) + a_i^{(3)}(x_i - x)^2 + a_i^{(4)}(x_i - x)^3 \quad (3)$$

2. Splňuje podmienku (2), pritom v celom uvažovanom intervale je spojitá a má spojité prvé a druhé derivácie

$$\begin{aligned} z'(x_{i+}) &= z'(x_{i-}) & a/ \\ z''(x_{i+}) &= z''(x_{i-}) & b/ \end{aligned} \quad (4)$$

Príslušné odvodenie pre prvé derivácie $m_i = z'(x_i)$ alebo pre druhé derivácie $M_i = z''(x_i)$ ukázané napr. v [2, 3] vedie k riešeniu systému lineárnych algebraických rovníc s trojdiagonálnou maticou koeficientov (5) s prvkami B_i , C_i , $i = 1, \dots, n$

na vedľajších diagonálach /z formálnych dôvodov predpokladáme $B_1 = C_n = 1/$.

$$\begin{bmatrix} 1 & C_1 & 0 & 0 \\ B_2 & 1 & C_2 & 0 \\ 0 & B_3 & 1 & C_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & 1 & C_{n-2} & 0 \\ & & B_{n-1} & 1 & C_{n-1} \\ & & 0 & B_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \dots \\ Z_{n-2} \\ Z_{n-1} \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \dots \\ R_{n-2} \\ R_{n-1} \\ R_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

Z_i je označenie pre hľadanú deriváciu, R_i sú príslušné prave strany systému rovníc. Prvky C_1 a B_n vyjadrujú okrajové podmienky riešenia.

Riešenie systému (5) priamou metódou môžeme napísať v tvare (6)

$$Z_i = \sum_{k=1}^n D_{i,k}^{-1} R_k \quad (6)$$

kde $D_{i,k}^{-1}$ sú prvky inverznej matice koeficientov. Vypracovali sme však efektívnu metódu riešenia systémov typu (5) [2,4], pri ktorej prvky inverznej matice sme vyjadrili ako súčiny funkcií, z ktorých jedna je funkciou len indexu i , druhá len indexu k . Potom (6) môžeme napísať v tvare

$$Z_i = V_i \sum_{k=1}^i U_k R_k + U_i^{(1)} \sum_{k=i+1}^n V_k^{(1)} R_k \quad (7)$$

kde

$$\begin{aligned} V_i &= -\frac{1}{B_{i+1}} [V_{i+1} + C_{i+1} V_{i+2}], \\ V_k^{(1)} &= -\frac{1}{C_k} [V_{k+1}^{(1)} + B_{k+1} V_{k+2}^{(1)}], \\ V_n &= V_n^{(1)} = (-1)^n, \quad V_{n+1} = V_{n+1}^{(1)} = 0, \\ U_k &= -\frac{1}{B_k} [U_{k-1} + C_{k-2} U_{k-2}], \\ U_i^{(1)} &= -\frac{1}{C_{i-1}} [U_{i-1}^{(1)} + B_{i-1} U_{i-2}^{(1)}], \end{aligned} \quad (8)$$

$$U_0 = U_C^{(1)} = 0, \quad U_1 = -1/v_0, \quad U_1^{(1)} = -1/v_0^{(1)}.$$

Naznačený spôsob priameho riešenia s vyjadrením prvkov inverznej matice pomocou rekurentných vzťahov (8), ktorý odstraňuje nevyhnutnosť invertovania matice koeficientov je veľmi rýchly a vhodný i pri neautomatizovanom výpočte pomocou malých kalkulačiek. Táto ako i ďalšie výhody metódy sa plne prejavajú pri výpočte pomocou samočinných počítačov, najmä pri uvažovaní veľkého počtu n uzlov.

Pre praktické použitie sme vypracovali algoritmy: TRINV [5], ktorý rieši všeobecný systém typu (5) a SPLINE [6], ktorý počíta korene zjednodušeného systému pri rovnomernom delení intervalu. Pre riešenie systémov typu (5) je možné použiť aj iné, napr. eliminačné metódy výpočtu. Nami ukázaný spôsob podľa (7) bude výhodný hlavne pri výpočte derivácií na rovinných sieťach, kedy ide o riešenie pre rôzne pravé a tie isté ľavé strany systému (5); ďalej v prípadoch, kedy nás zaujímajú hodnoty derivácií len v niektorých zvolených uzloch intervalu.

D i s k r é t n y c h a r a k t e r e x p e r i m e n -
t á l n e m e r a n ý c h ú d a j o v

Rozbor vlastností splajnových funkcií a presnosti výpočtu pri numerických aplikáciach ukazujú, že kubické splajny možno výhodne používať pri určovaní derivácií funkcií zadávaných v diskretných bodoch nezávislej premennej. Takýto charakter meraných funkčných závislostí dáva väčšina experimentálnych metód. Optické, interferenčné metódy experimentálnej analýzy napätí a deformácií poskytujú obraz vrstevnic meraných vel obvykle vo forme fotografie povrchu vyšetrovanej konštrukso superponovanými svetlými a tmavými pruhmi, ktoré reprezentujú interferenčný jav medzi dvomi vlnoplochami, vznikajúcimi pri dvoch fyzikálne odlišných stavoch konštrukcie. Keďže tieto pruhy vznikajú interferenciou, maximum intenzity vzniká vždy, keď merané premiestnenie dosiahne celočíselný násobok vlnovej dĺžky použitého svetla. Každý interferenčný pruh reprezentuje teda vrstevnicu konštantného premiestnenia. Napríklad pri vyšetrovaní ohybu tenkých dosák holograficko-interfe-

renčnou metódou získaný interferogram /obr.1/ obsahuje čiary rovnakých priebehov.

Interferenčný obraz spravidla charakterizuje funkcia typu $\cos^2 \Delta\psi$, kde $\Delta\psi$ znamená dráhový rozdiel. Funkčné hodnoty potom môžeme určiť s postačujúcou presnosťou len v miestach miním /prípadne maxím/ intenzity, v ostatných bodoch oblasti je interpretácia vzhľadom na charakter funkcie ťažná a menej presná.

Experimentálne získavané veličiny pri interferenčných meraniach predstavujú teda sériu meraných polôh miním /maxím/ interferenčného obrazu. Táto diskrétna povaha údajov vyžaduje a/ použitie interpolačných a aproximáčnych metód, ak je žiaduce poznať hodnoty meranej funkcie v medziľahlých bodoch oblasti;
b/ rozpracovanie vhodných numerických metód, ak hľadáme hodnoty derivácií meranej funkčnej závislosti.

V ý p o č e t p r v ý c h d e r i v á c i í

Uvažujme rozdelenie intervalu $\langle x_1, x_n \rangle$ bodmi x_i na $n-1$ podintervalov dĺžky h_i , $i = 2, 3, \dots, n$

$$h_i = x_i - x_{i-1} \quad (9)$$

Odvodenie pre prvé derivácie $Z_i = m_i$, podrobnejšie ukázané v [2,3] vedie k systému rovníc typu (5), v ktorom pre $i = 2, 3, \dots, n-1$

$$B_i = 0,5 \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \quad C_i = 0,5 - B_i \quad (10)$$

$$R_i = \frac{3}{2} \frac{1}{h_i + h_{i+1}} \left[\frac{h_{i+1}}{h_i} (z_i - z_{i-1}) + \frac{h_i}{h_{i+1}} (z_{i+1} - z_i) \right] \quad (11)$$

Okrajové podmienky pre prípad, kedy v uzloch x_1 a x_n okrem funkčných hodnôt z_1 a z_n nepoznáme ďalšie podmienky možno odvodiť v tvare [3]:

$$C_1 = B_n = 1 \quad (12)$$

$$R_1 = 2 \frac{z_2 - z_1}{h_2}, \quad R_n = 2 \frac{z_n - z_{n-1}}{h_n}$$

Výpočet numerických derivácií funkcie, zadanej jej hodnotami v diskretných bodoch sme overovali na simulovaných príkladoch, kedy za dané funkčné hodnoty v uzloch intervalu sa považovali presné hodnoty zvolenej analytickej funkcie. Takýto prístup dovoľuje názorne posudzovať presnosť, s akou splajnové funkcie aproximujú i zložitejšie funkčné závislosti, umožňuje skúmať mechanizmus výpočtu, vplyv rôznych parametrov, ako i naznačuje možnosti aplikácií metódy.

Ilustratívny príklad 1.: Závislosť presnosti výpočtu numerických derivácií pomocou opisovanej metódy na počte uzlov v uvažovanom intervale je samozrejme a je spoločnou vlastnosťou všetkých numerických metód. Pre ilustráciu ukážeme výsledky výpočtu prvých derivácií na simulovanom príklade. Presné hodnoty funkcie

$$z_i = 1,5 x_i^{2,3} \exp / -0,5 x_i / \quad (13)$$

v uzloch x_i intervalu $\langle 0, 2 \rangle$ sme považovali za údaje, simulujúce experimentálne merané hodnoty. Hodnoty m_i riešením systému (5) podľa (7) s ohľadom na (9)-(12) sme vypočítali pre dva prípady nerovnomerného delenia intervalu s $n=20$ a $n=14$ /stĺpce 1 resp. 5 tab.1/ a s polohami uzlov x_i podľa 2 tab.1. Relatívne odchýlky P_m medzi vypočítanými m_i a teoretickými hodnotami z_i'

$$P_m = 100 \frac{z_i' - m_i}{z_i'} \% \quad (14)$$

sú v stĺpcoch 3 resp. 6 tabuľky. Stĺpce 5 a 7 obsahujú relatívne odchýlky P_r

$$P_r = 100 \frac{z_i' - \delta_i}{z_i'} \% \quad (15)$$

medzi teoretickými hodnotami z_i' a diferenčnými hodnotami δ_i , počítanými podľa vzťahu

$$\delta_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \left[\frac{z_i - z_{i-1}}{h_i} + \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} \frac{z_{i+1} - z_i}{h_{i+1}} \right], \quad (16)$$

ktorý sa pre výpočet diferenčných hodnôt pri nerovnomernom delení siete v praxi často používa. Z porovnania (16) a (11) vyplýva, že pravé strany rovníc (5) obsahujú vlastne vzťah pre

diferenčný výpočet, z porovnania výsledkov v tab.1 však vyplýva rádovo viacnásobne lepšia presnosť výpočtu pomocou splajnových funkcií. Záverečná správa [2] obsahuje viac numerických experimentov, potvrdzujúcich tento záver.

Rovnomerné delenie intervalu. Pri riešení praktických úloh sa často vyskytuje prípad rovnomerne rozdeleného intervalu s $n-1$ podintervalmi dĺžky $h_i = h$. Z (10) a (11) potom máme

$$B_i = C_i = B = 0,25, \quad R_i = C,75 \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{h} \quad (17)$$

a pre okrajové podmienky (12)

$$C_1 = B_n = 1, \quad R_1 = 2 \frac{z_2 - z_1}{h}, \quad R_n = 2 \frac{z_n - z_{n-1}}{h}. \quad (18)$$

Pre výpočet m_i môžeme použiť výraz (7) s príslušne upravenými vzťahmi (8) alebo jednoduchšie riešenie (19) pre rovnomerne rozdelené uzly

$$\begin{aligned} Z_1 &= D^{-1} \bar{U}_1 [\bar{V}_1 R_1 + C_1 B^{-1} \sum_{k=2}^n \bar{V}_k R_k], \\ Z_i &= D^{-1} [\bar{V}_i \sum_{k=1}^i \bar{U}_k R_k + \bar{U}_i \sum_{k=i+1}^n \bar{V}_k R_k], \\ Z_n &= D^{-1} \bar{V}_n [B_n B^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} \bar{U}_k R_k + \bar{U}_n R_n] \end{aligned} \quad (19)$$

kde

$$D = (1 - C_1 B_n) D_{n-2} + [C_1 B_n - B(C_1 + B_n)] D_{n-3},$$

$$D_t = D_{t-1} - B^2 D_{t-2}, \quad D_{-1} = 0, \quad D_0 = 1,$$

$$\bar{V}_i = (-B)^i (D_{n-i-1} - B_n B \cdot D_{n-i-2}), \quad i=1,2,\dots,n-1 \quad (20)$$

$$\bar{V}_n = (-B)^n,$$

$$\bar{U}_1 = -B^{-1},$$

$$\bar{U}_k = (-B)^{-k} (D_{k-2} - C_1 B \cdot D_{k-3}), \quad k=2,3,\dots,n.$$

V záverečnej správe sme vypracovali [2] pre výpočet (?) podprogram VUD a pre riešenie Z_i podľa (19) podprogram ZKOR. Tieto podprogramy sú všeobecnejšie a platia pre ľubovoľné B , C_1 a B_n . V našom prípade pre $B=0,25$ a $C_1=B_n=1$ možno výrazy (19)

a (20) ešte zjednodušiť.

Ilustratívny príklad 2.: Použitie kubických splajnov pri derivovaní experimentálne nameraných údajov ukážeme na príklade štvorcovej votknutej dosky, zataženej v strede sústredenou silou P. Model dosky o rozmeroch 72 x 72 mm sme vyšetrovali holograficko-interferenčnou metódou, ktorá umožňuje získavanie čiar rovnakých priehybov na celom povrchu modelu. Na obr.1 sú interferenčné čiary rovnakých priehybov pre zataženie $P = 4,9 \text{ N}$. V miestach minim intenzity svetla /tmavé pruhy/ sú veľkosti priehybov w dané vzťahom

$$w = c \frac{\lambda}{2}, \quad c = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \dots,$$

kde λ je vlnová dĺžka použitého monochromatického svetla He-Ne laseru, c je z interferogramu určená tzv. hodnota interferenčnej čiary.

Výpočet prvých derivácií priehybov sme previedli v reze C - C, vedenom cez stred dosky a rozdelenom bodmi x_i , $i=1 - 19$ na 18 rovnakých podintervalov dĺžky $h=0,4 \text{ cm}$. Hodnoty priehybov $w_i = z_i$ v uzloch intervalu, určené z interferogramu na obr.1 a prepočítané na zataženie $P = 1 \text{ N}$ tvorili vstupné údaje pre výpočet.

Vyššie uvedenou metódou derivovania pri okrajových podmienkach (18) vypočítané hodnoty m_i sme označili krížikmi na grafe na obr.2 a porovnali s teoretickými hodnotami, vypočítanými na základe teórie ohybu tenkých dosák, ktorých priebeh sme vyznačili spojitou čiarou.

Pri porovnávaní výsledkov treba uvážiť, že teoretické metódy výpočtu vychádzajú z určitých predpokladov, čo sa týka izotropnosti a homogenosti materiálu, materiálových konštánt, spôsobu zatažovania a okrajových podmienok. Experimentálne vyšetrovanie dáva výsledky meraní na konkrétnych fyzikálnych modeloch, odrážajúce reálne vlastnosti modelového materiálu a vplyv rozdielného pôsobenia predpokladaného a realizovaného podporného systému. Výrazný je napr. vplyv okrajových podmienok. V uvedenom príklade teoretický výpočet predpokladá dokonalé votknutie, t.j. nulové pootočenie na okraji oblasti. Experimentálne realizovaný systém podopretia nemôže plne vystihnúť

tento idealizovaný predpoklad, čo ovplyvní merané hodnoty w ako i hodnoty m_i najmä v blízkosti okraja. Vypočítané hodnoty m_1 a m_{19} nie sú teda ovplyvnené len chybami numerickej metódy, ale odrážajú aj fyzikálne podmienky experimentu. Tento záver podporuje i poznatok, že výpočet m_i pri predpoklade nulového pootočenia na okraji $C_1=B_n=0$ dáva v susedných bodoch horšie výsledky /na obr.2 vyznačené krúžkami/.

V ý p o č e t d r u h ý c h d e r i v á c i í

Cdodenie pre výpočet druhých derivácií $Z_i = M_i$ vedie k systému rovníc typu (5), v ktorom pre koeficienty a pravé strany máme pre $i = 2, 3, \dots, n-1$

$$B_i = 0,5 \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \quad C_i = 0,5 - B_i, \quad (21)$$

$$R_i = \frac{3}{h_i + h_{i+1}} \left[\frac{z_{i+1} - z_i}{h_{i+1}} - \frac{z_i - z_{i-1}}{h_i} \right]$$

alebo v prípade rovnomerného rozdelenia intervalu $h_i = h$

$$C_i = B_i = B = 0,25, \quad (22)$$

$$R_i = \frac{3}{2h^2} (z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1})$$

s okrajovými podmienkami

$$C_1 = B_n = 1,$$

$$R_1 = \frac{2}{h^2} (z_3 - 2z_2 + z_1), \quad (23)$$

$$R_n = \frac{2}{h^2} (z_n - 2z_{n-1} + z_{n-2}).$$

Ukázalo sa, že výpočet druhých derivácií M_i riešením systému (5) pre $B = 0,25$ / (22) / dáva výsledky s presnosťou rádo-vo niekoľkonásobne horšou, než výpočet prvých derivácií pri rovnomernom delení pre $B = 0,25$. V tabuľke 2 je porovnanie relatívnych odchýlok medzi teoretickými hodnotami a vypočítanými deriváciami pre prvé derivácie podľa (14) a pre druhé derivácie podľa (24)

$$P_M = 100 \frac{z_i'' - M_i}{z_i''} \% \quad (24)$$

pre simulované príklady funkcií

$$z_i = 0,75 \sin^2 x_i \quad (25)$$

v intervale $x_i \in \langle \pi/60, 29 \pi/60 \rangle$ a

$$z_i = 958 x_i^4 - 1326 x_i^3 + 384 x_i^2 + 20 x_i \quad (26)$$

v intervale $x_i \in \langle 0, 1 \rangle$.

Uvažované intervaly boli bodmi x_i , $i = 1, 2, \dots, 29$ rozdelené na 28 rovnakých podintervalov dĺžky h

$$h = (x_n - x_1) / (n-1).$$

Hodnoty P_m a P_M sú v tab.2 ukázané pre vnútorné body intervalu $i = 10 - 20$.

K tomuto záveru o menšej presnosti výpočtu druhých derivácií sa dospelo krátko po prvých aplikáciach splajnových funkcií k výpočtu numerických derivácií. Pre zvýšenie presnosti druhých derivácií niektorí autori odporúčali /napr. [1] / tzv. výpočet "splajnu zo splajnu". Táto metóda spočíva v aplikovaní riešenia systému (5) pre prvé derivácie dvakrát za sebou, pričom pri druhom výpočte sú vypočítané hodnoty m_i považované za vstupné funkčné hodnoty. Takýto spôsob výpočtu dáva presnejšie výsledky ako priamy výpočet M_i s $B = 0,25$.

Previedli sme [2] rozbor vplyvu koeficientu B na presnosť riešenia, pričom výraz (22) pre pravé strany systému (5) sme uvažovali v tvare

$$R_i = \frac{1 + 2B}{h^2} (z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}) \quad (27)$$

Výsledky výpočtov, prevedených s $B = 0,05; 0,1; 0,15; 0,175; 0,2; 0,225; 0,25; 0,275; 0,3; 0,35; 0,4$ pre celý rad rôznych simulovaných funkcií viedli k poznatku, že výpočet M_i pri rovnomernom delení intervalu dáva najpresnejšie výsledky, porovnateľné s presnosťou výpočtu prvých derivácií m_i pri riešení systému (5) pre $B = 0,1$, okrajové podmienky (23) a pravé strany

$$R_i = \frac{1,2}{h^2} (z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}). \quad (28)$$

Na obr.3 je vykreslená závislosť relatívnych odchýliek P_M na uvažovaných hodnotách B pre zvolené funkcie (25), (26) a funkciu (13) v intervale $x_i \in \langle 0,1; 1 \rangle$ pri rovnomernom delení intervalu na 28 podintervalov. Graf je nakreslený pre uzol $i = 10$.

Ilustratívny príklad 3.: Na obr.4 sú krúžkami vyznačené uvede-
nou metódou vypočítané hodnoty druhých derivácií M_2 funkcie
priehybov bodove podopretej štvorcovej dosky, zaťaženej v stre-
de sústredenou silou $P = 1 \text{ N}$. Model dosky rozmerov $90 \times 90 \text{ mm}$
sme vyšetrovali metódou holografickej interferometrie [7]. Vy-
počítané hodnoty M_2 sú na obr.4 porovnané s hodnotami druhých
derivácií priehybov, získanými graficko-numerickým derivovaním
a vyznačenými krížikmi a s hodnotami vyplývajúcimi z riešenia
uvažovanej dosky metódou konečných elementov /ležaté krížiky/.

Z á v e r

Uvedená metóda numerického derivovania, založená na využí-
tí vlastností splajnových funkcií dáva spoľahlivé a dostatoč-
ne presné výsledky a možno ju úspešne použiť pri spracovávaní
experimentálne nameraných údajov. Riešenie vedie k jednoduchým
vzťahom pre praktický výpočet, vhodným i v prípade nedostupnos-
ti samočinného počítača.

Pri opísanej metóde sa predpokladá, že experimentálne hod-
noty dobre vystihujú meranú funkčnú závislosť a nevykazujú vý-
raznejší rozptyl hodnôt. Túto podmienku možno bez ťažkostí za-
bezpečiť u interferenčných metód, ktoré sú vysoko citlivé,
presné a poskytujú informácie v celej vyšetrovanej oblasti.

L i t e r a t ú r a:

1. Ahlberg, J.H. - Nilson, E.N. - Walsh, J.L.: The Theory of Splines and Their Applications, Acad. Press, New York - London, 1967.
2. Szabó, V.: Derivovanie experimentálne nameraných údajov pomocou splajn-funkcií, Záverečná správa, ÚSTARCH-SAV Bratislava, 1976.
3. Szabó, V.: Numerické derivovanie experimentálne nameraných údajov pomocou splajnov, Stavebnícky časopis, 1977, v tlači.
4. Szabó, V. - Sumec, J.: Použitie splajn-funkcií pre numerické derivovanie, Sborník 4. sympózia "Algoritmy vo výpočtovej technike", 19.-22.4.1977 /v tlači/.
5. Sumec, J. - Szabó, V.: TRINV - Riešenie systému lineárnych algebraických rovníc s trojdiagonálnou maticou, Aplikace matematiky, Algoritmy /v tlači/
6. Sumec, J. - Szabó, V.: SPLINE - Výpočet derivácií funkcie zadanej v bodoch pri rovnomernom delení intervalu, Sborník 4. Sympózia "Algoritmy vo výpočtovej technike", 19.-22.4.1977 /v tlači/
7. Balaš, J. - Nasch, Ľ. - Szabó, V.: Výpočet dosák kombináciou holografickej interferometrie a metódy konečných prvkov, Stavebnícky časopis, 1977 č. 4.

Tabuľka 1

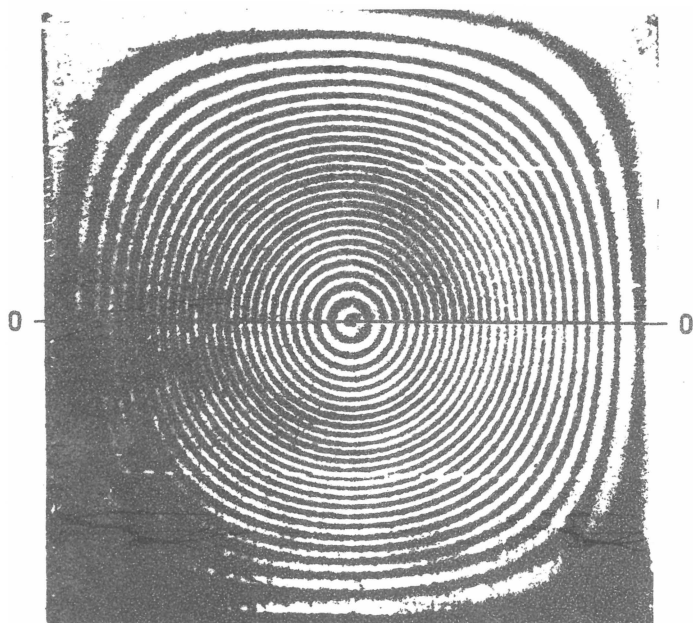
i	x_i	P_m	P_r	i	P_m	P_r
1	2	3	4	5	6	7
1	0,00			1		
2	0,04	-0,731E+01	-0,127E+02	2	-0,213E+01	-0,250E+01
3	0,16	0,550E+00	-0,102E+01	3	0,300E+00	0,894E+00
4	0,26	-0,548E-01	0,117E+00	4	-0,302E-01	0,627E+00
5	0,34	0,606E-02	0,347E+00	5	0,814E-02	0,512E+00
6	0,48	0,535E-02	0,164E+00	6	0,141E-02	0,720E+00
7	0,52	-0,300E-02	0,145E+00	7	-0,132E-02	0,591E+00
8	0,64	0,174E-02	0,512E+00	8	0,208E-02	0,450E+00
9	0,80	0,106E-02	0,506E+00	9	-0,300E-02	0,194E+00
10	0,94	-0,136E-02	0,166E+00	10	0,244E-02	0,172E+00
11	1,00	0,192E-02	0,174E+00	11	0,281E-02	0,189E+00
12	1,16	-0,155E-02	0,254E+00	12	-0,159E-01	0,112E+00
13	1,26	-0,341E-02	0,114E+00	13	0,687E-01	0,177E+00
14	1,34	-0,717E-02	0,844E-01	14	-0,323E+00	-0,187E+01
15	1,42	0,251E-02	0,172E+00			
16	1,60	-0,273E-02	0,189E+00			
17	1,70	0,134E-02	0,112E+00			
18	1,82	-0,148E-02	0,139E+00			
19	1,96	0,642E-02	0,419E-01			
20	2,00	-0,179E-01	-0,458E+00			

Tabuľka 2

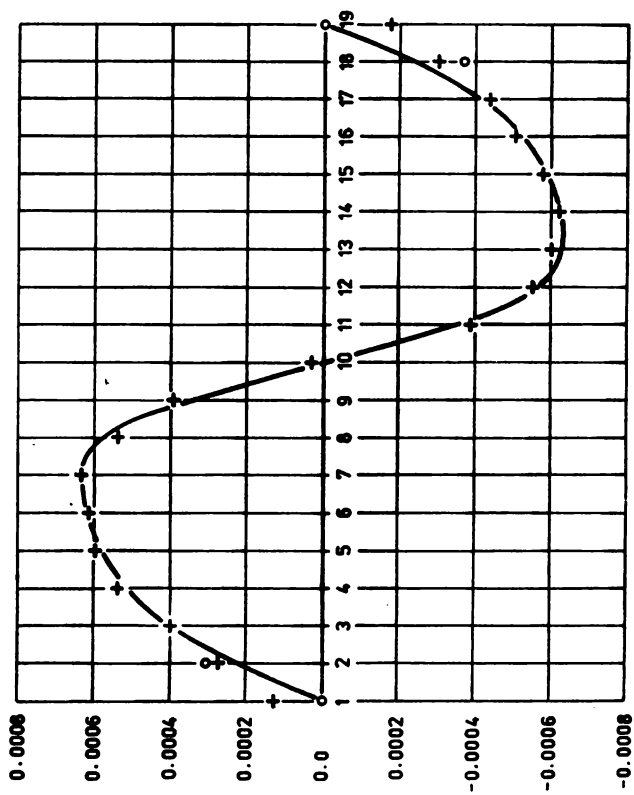
i	funkcia (25)		funkcia (26)	
	P_m	P_M	P_m	P_M
10	0,6725E-04	-0,9146E-01	-0,5740E-04	-0,3638E+00
11	0,6683E-04	-0,9140E-01	0,8244E-05	-0,3573E+00
12	0,6691E-04	-0,9142E-01	-0,1416E-05	-0,3657E+00
13	0,6692E-04	-0,9141E-01	0,2447E-06	-0,3924E+00
14	0,6691E-04	-0,9143E-01	-0,8025E-07	-0,4459E+00
15	0,6690E-04	-0,9142E+01	0,9414E-07	-0,5504E+00
16	0,6689E-04	-0,9140E-01	0,1323E-06	-0,7868E+00
17	0,6681E-04	-0,9143E-01	-0,4902E-06	-0,1652E+01
18	0,6693E-04	-0,9141E-01	0,1455E-06	0,5539E+01
19	0,6674E-04	-0,9141E-01	-0,5149E-05	0,9211E+00
20	0,6714E-04	-0,9145E-01	0,2052E-04	0,4725E+00

Z o z n a m o b r á z k o v

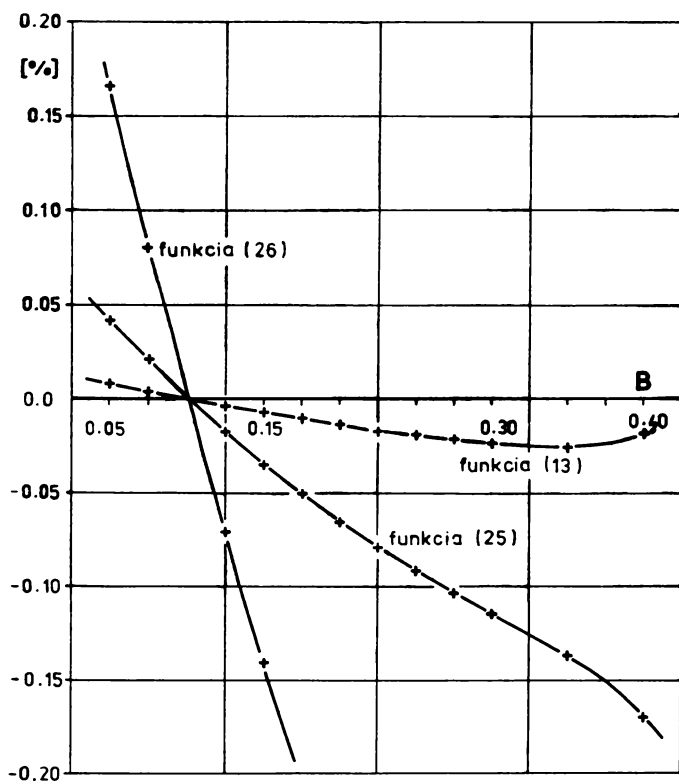
- Obr.1. Interferenčné čiary reprezentujúce čiary rovnakých priehybov na modeli votknutej štvorcovej dosky.
- Obr.2. Porovnanie vypočítaných hodnôt prvých derivácií s teoretickými v reze $O - O$ cez stred dosky.
- Obr.3. Závislosť presnosti výpočtu na hodnote koeficientu B pri výpočte druhých derivácií na rovnomerne delenom intervale.
- Obr.4. Porovnanie vypočítaných hodnôt druhých derivácií v reze cez stred štvorcovej bodovo podopretej dosky.



obr. 1.



obr. 2.



obr. 3.

epi. r.

