

ROVINNÝ PŘÍPAD SILOVÉHO POLE
TVOŘENÉHO VSKOELASTICKÝMI ČLÁNKY.

Ing. Karel Dedouch

ČVUT FSI Praha

Rovinný případ silového pole tvořeného viskoelastickými články

V referátu je uvedeno analytické řešení rovinného případu silového pole, tvořeného viskoelastickými články. Pomocí Laplaceovy transformace byla vypočtena odezva pole na skokový průběh budicí síly. Byla vyšetřena vlastnost elementů silového pole (pružiny, tlumiče, Kelvin-Voigtova článku), která umožňuje stanovení odezvy silového pole na skokový průběh budicí síly, jsou-li tvořící jednotky tvořeny řetězcem viskoelastických článků.

V závěru příspěvku byly vyšetřeny polohy hlavních os pružnosti a tlumení pro vybrané případy rovinného silového pole, tvořeného viskoelastickými články.

1. Rovinný případ silového pole tvořeného Maxwellovými články.

Uvažujme rovinný případ silového pole, které je tvořeno dvěma Maxwellovými články, jejichž osy svírají s kladným směrem osy x úhly α_1 a α_2 . Necht v bodě A (obráz. 1) působí na pole síla $\vec{F}$, která se v čase $t = 0^+$ mění z nulové hodnoty skokem na hodnotu F_0 . Vektor síly $\vec{F}$ svírá s kladným směrem osy x úhel β . Vyšetříme trajektorii bodu A jako odezvu pole na sílu $\vec{F}$ za předpokladu, že je bod A nehmotný a že při jeho pohybu nedojde ke změně velikostí úhlů α_1 , α_2 a β .

Obecná poloha bodu A je určena radiusvektorem

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Jednotkový vektor ve směru i -té pružící jednotky je dán výrazem

$$\vec{S}_{0i} = \cos \alpha_1 \vec{i} + \sin \alpha_1 \vec{j}$$

Potom

$$\sigma_{1i} = \vec{r} \cdot \vec{S}_{0i} = x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1$$

Pro vyšetřovaný nehmotný bod A platí

$$m \vec{a} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{F} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} x : -c_1(\sigma_{11} - \sigma_{21}) \cos \alpha_1 - c_2(\sigma_{12} - \sigma_{22}) \cos \alpha_2 + \\ + F(t) \cos \beta = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} y : -c_1(\sigma_{11} - \sigma_{21}) \sin \alpha_1 - c_2(\sigma_{12} - \sigma_{22}) \sin \alpha_2 + \\ + F(t) \sin \beta = 0 \end{aligned}$$

Statické podmínky rovnováhy bodů B_1 jsou dány vztahy

$$B_1 : c_1(\sigma_{11} - \sigma_{21}) - k_1 \dot{\sigma}_{21} = 0 \quad (2)$$

$$B_2 : c_2(\sigma_{12} - \sigma_{22}) - k_2 \dot{\sigma}_{22} = 0$$

Dosadíme-li do soustavy rovnic (1), (2) za σ_{1i} , obdržíme po úpravě

$$x : (c_1 \cos^2 \alpha_1 + c_2 \cos^2 \alpha_2)x + (c_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 +$$

$$+ c_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2) y - c_1 \cos \alpha_1 \ddot{\sigma}_{21} - c_2 \cos \alpha_2 \ddot{\sigma}_{22} = \\ = F(t) \cos \beta$$

$$y : (c_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + c_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2) x + (c_1 \sin^2 \alpha_1 + \\ + c_2 \sin^2 \alpha_2) y - c_1 \sin \alpha_1 \ddot{\sigma}_{21} - c_2 \sin \alpha_2 \ddot{\sigma}_{22} = F(t) \sin \beta \\ \ddot{\sigma}_{21} + \frac{c_1}{k_1} \ddot{\sigma}_{21} - \frac{c_1}{k_1} \cos \alpha_1 x - \frac{c_1}{k_1} \sin \alpha_1 y = 0 \\ \ddot{\sigma}_{22} + \frac{c_2}{k_2} \ddot{\sigma}_{22} - \frac{c_2}{k_2} \cos \alpha_2 x - \frac{c_2}{k_2} \sin \alpha_2 y = 0 \quad (3)$$

Zobrazme soustavu rovnic (3) pomocí Laplaceovy transformace a řešíme je pro případ, že se amplituda budící síly mění v čase $t = 0^+$ skokem z nulové hodnoty na hodnotu F_0 . Vektor budící síly $\vec{F}$ svírá s kladným směrem osy x konstantní úhel β . Řešení provedme pro nulové počáteční podmínky $x(0) = y(0) = \ddot{\sigma}_{21}(0) = \ddot{\sigma}_{22}(0) = 0$.

Výsledný vztah pro obraz $X(p)$ je dán výrazem

$$X = \frac{F_0}{\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \left[\frac{\sin \alpha_1 \sin(\alpha_1 - \beta)}{c_2} + \right. \\ \left. + \frac{\sin \alpha_2 \sin(\alpha_2 - \beta)}{c_1} \right] \frac{1}{p} + \frac{F_0}{\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \cdot \\ \cdot \left[\frac{\sin \alpha_1 \sin(\alpha_1 - \beta)}{k_2} + \frac{\sin \alpha_2 \sin(\alpha_2 - \beta)}{k_1} \right] \frac{1}{p^2} = \\ = \frac{A_x}{p} + \frac{B_x}{p^2}$$

Analogicky pro $Y(p)$ obdržíme

$$Y = \frac{F_0}{\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \left[\frac{\cos \alpha_1 \sin(\beta - \alpha_1)}{c_2} + \right. \\ \left. + \frac{\cos \alpha_2 \sin(\beta - \alpha_2)}{c_1} \right] \frac{1}{p} + \frac{F_0}{\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{\cos \alpha_1 \sin(\beta - \alpha_1)}{k_2} + \frac{\cos \alpha_2 \sin(\beta - \alpha_2)}{k_1} \right] \frac{1}{p^2} =$$

$$= \frac{A_Y}{p} + \frac{B_Y}{p^2} \quad (4)$$

Originály $x(t)$ a $y(t)$ k obrazům $X(p)$ a $Y(p)$ jsou dány vztahy

$$x(t) = \frac{F_0}{\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \left[\frac{\sin \alpha_1 \sin(\alpha_1 - \beta)}{c_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin \alpha_2 \sin(\alpha_2 - \beta)}{c_1} \right] \eta(t) + \frac{F_0}{\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{\sin \alpha_1 \sin(\alpha_1 - \beta)}{k_2} + \frac{\sin \alpha_2 \sin(\alpha_2 - \beta)}{k_1} \right] t =$$

$$= A_x \eta(t) + B_x t$$

a

$$y(t) = \frac{F_0}{\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \left[\frac{\cos \alpha_1 \sin(\beta - \alpha_1)}{c_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos \alpha_2 \sin(\beta - \alpha_2)}{c_1} \right] \eta(t) + \frac{F_0}{\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{\cos \alpha_1 \sin(\beta - \alpha_1)}{k_2} + \frac{\cos \alpha_2 \sin(\beta - \alpha_2)}{k_1} \right] t =$$

$$= A_y \eta(t) + B_y t \quad (5)$$

2. Rovinný případ silového pole tvořeného viskoelastickými články 2. typu.

Vyšetřme pohyb nehmotného bodu v silovém poli, které je tvořeno dvěma viskoelastickými články, z nichž každý vznikl seriovým spojením Kelvin-Voigtova článku a tlumiče (obr. 2). Budící síla, která působí v bodě A se mění skokem z nulové

hodnoty na hodnotu F_0 v čase $t = 0^+$, vektor budící síly F svírá s kladným směrem osy x konstantní úhel β . Řešení je opět provedeno pro nulové počáteční podmínky.

Je-li bod A uvažován jako nehmotný, je jeho pohyb popsán rovnicemi

$$m\ddot{x} = 0 = -k_{11}(\dot{\delta}_{11} - \dot{\delta}_{21}) \cos \alpha_1 - k_{12}(\dot{\delta}_{12} - \dot{\delta}_{22}) \cos \alpha_2 + F(t) \cos \beta$$

$$m\ddot{y} = 0 = -k_{11}(\dot{\delta}_{11} - \dot{\delta}_{21}) \sin \alpha_1 - k_{12}(\dot{\delta}_{12} - \dot{\delta}_{22}) \sin \alpha_2 + F(t) \sin \beta$$

Statické podmínky rovnováhy bodů B_1 jsou dány vztahy

$$B_1 : k_{11}(\dot{\delta}_{11} - \dot{\delta}_{21}) - k_{21}\dot{\delta}_{21} - c_1\dot{\delta}_{21} = 0$$

$$B_2 : k_{12}(\dot{\delta}_{12} - \dot{\delta}_{22}) - k_{22}\dot{\delta}_{22} - c_2\dot{\delta}_{22} = 0 \quad (6)$$

Dosadíme-li do soustavy rovnic (6) za $\dot{\delta}_{11}$ a $\dot{\delta}_{12}$ výrazy

$$\dot{\delta}_{11} = \dot{x} \cos \alpha_1 + \dot{y} \sin \alpha_1$$

$$\dot{\delta}_{12} = \dot{x} \cos \alpha_2 + \dot{y} \sin \alpha_2$$

Obdržíme po úpravě a zobrazení v Laplaceově transformaci následné vztahy pro obrazy funkcí $X(p)$ a $Y(p)$ ve tvaru

$$X(p) = F_0 \left[\frac{\sin \alpha_1 \sin(\alpha_1 - \beta)}{k_{12} \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} + \frac{\sin \alpha_2 \sin(\alpha_2 - \beta)}{k_{11} \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \right] \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{p^2} + \frac{F_0 \sin \alpha_1 \sin(\alpha_1 - \beta)}{c_2 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{c_2}{k_{22}}} \right] +$$

$$+ \frac{F_0 \sin \alpha_2 \sin(\alpha_2 - \beta)}{c_1 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{c_1}{k_{21}}} \right]$$

$$Y(p) = F_0 \left[\frac{\cos \alpha_1 \sin(\beta - \alpha_1)}{k_{12} \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} + \frac{\cos \alpha_2 \sin(\beta - \alpha_2)}{k_{11} \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \right] \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{F_0 \cos \alpha_1 \sin(\beta - \alpha_1)}{c_2 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{c_2}{k_{22}}} \right] + \\ & + \frac{F_0 \cos \alpha_2 \sin(\beta - \alpha_2)}{c_1 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{c_1}{k_{21}}} \right] \quad (7) \end{aligned}$$

Originály k obrazům $X(p)$ a $Y(p)$ soustavy (7) byly získány použitím residuové věty. Výsledné výrazy pro originály $x(t)$ a $y(t)$, které jsou parametrickými rovnicemi trajektorie bodu A) obdržíme ve tvaru

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{F_0 \sin \alpha_1 \sin(\alpha_1 - \beta)}{c_2 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \left(1 - e^{-\frac{c_2}{k_{22}} t} \right) + \\ & + \frac{F_0 \sin \alpha_2 \sin(\alpha_2 - \beta)}{c_1 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \left(1 - e^{-\frac{c_1}{k_{21}} t} \right) + \\ & + F_0 \left[\frac{\sin \alpha_1 \sin(\alpha_1 - \beta)}{k_{12} \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} + \frac{\sin \alpha_2 \sin(\alpha_2 - \beta)}{k_{11} \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \right] t \\ y(t) = & \frac{F_0 \cos \alpha_1 \sin(\beta - \alpha_1)}{c_2 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \left(1 - e^{-\frac{c_2}{k_{22}} t} \right) + \\ & + \frac{F_0 \cos \alpha_2 \sin(\beta - \alpha_2)}{c_1 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \left(1 - e^{-\frac{c_1}{k_{21}} t} \right) + \\ & + F_0 \left[\frac{\cos \alpha_1 \sin(\beta - \alpha_1)}{k_{12} \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} + \frac{\cos \alpha_2 \sin(\beta - \alpha_2)}{k_{11} \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \right] t \quad (8) \end{aligned}$$

Prvé dva členy v rovnicích (8) popisují chování Kelvin-Voigtova článku, vliv seriově připojeného tlumiče je vyjádřen třetím členem.

3. Zhodnocení rovinného případu silového pole vytvořeného viskoelastickými články.

V předcházející kapitole byly vyšetřeny vlastnosti silového pole, vytvořeného v prvním případě dvěma Maxwellovými články, ve druhém případě dvěma viskoelastickými jednotkami, které vznikly seriovým spojením Kelvin-Voigtova článku a tlumiče.

Cílem výpočtu bylo vyšetření trajektorie $x(t)$ a $y(t)$ bodu A jako odezvy pole na budící sílu, která se v čase $t = 0^+$ změnila z nulové hodnoty skokem na hodnotu F_0 . Vektor síly F svíral s kladným směrem osy x konstantní úhel β .

Porovnáme-li výsledné vztahy pro $x(t)$ a $y(t)$ z rovnic (5) a (8) vidíme, že vliv seriově zapojených tlumičů na přírůst x -ové resp. y -ové souřadnice je v obou případech stejný. Se zřetelem na platnost zákona superpozice lze vyslovit tvrzení, že stejnou vlastnost bude mít i pružina a Kelvin-Voigtův článek.

Známe-li odezvy jednotlivých elementů na skokový průběh budící síly, lze napsat ihned výsledné vztahy pro trajektorii vyšetřovaného bodu A $x(t)$ a $y(t)$ pro zvolený typ pružící jednotky.

4. Rovinný případ silového pole vytvořeného viskoelastickými články, které představují model standardního tělesa.

Předpokládejme shodně s předcházejícími případy, že je silové pole zatíženo v bodě A silou F , která se mění v čase $t = 0^+$ z nulové hodnoty na hodnotu F_0 . Odvozené řešení platí za předpokladu, že při pohybu bodu A zůstávají úhly α_1 , α_2 i β konstantní (obr. 3).

Trajektorie bodu A je určena vztahy

$$x(t) = \frac{F_0}{\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \left[\frac{\sin \alpha_1 \sin(\alpha_1 - \beta)}{c_{12}} + \frac{\sin \alpha_2 \sin(\alpha_2 - \beta)}{c_{11}} \right] \eta(t) + \frac{F_0}{\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \cdot$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \left[\frac{\sin \alpha_1 \sin(\alpha_1 - \beta)}{c_{22}} \left(1 - e^{-\frac{c_{22}}{k_2} t} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{\sin \alpha_2 \sin(\alpha_2 - \beta)}{c_{21}} \left(1 - e^{-\frac{c_{21}}{k_1} t} \right) \right] \\
 y(t) = & \frac{F_0}{\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \left[\frac{\cos \alpha_1 \cos(\beta - \alpha_1)}{c_{12}} + \right. \\
 & \left. + \frac{\cos \alpha_2 \sin(\beta - \alpha_2)}{c_{11}} \right] \eta(t) + \frac{F_0}{\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \cdot \\
 & \cdot \left[\frac{\cos \alpha_1 \sin(\beta - \alpha_1)}{c_{22}} \left(1 - e^{-\frac{c_{22}}{k_2} t} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{\cos \alpha_2 \sin(\beta - \alpha_2)}{c_{21}} \left(1 - e^{-\frac{c_{21}}{k_1} t} \right) \right] \quad (9)
 \end{aligned}$$

5. Rovinný případ silového pole, vytvořeného Burgersovými viskoelastickými články.

Vyšetříme pro úplnost trajektorii $x(t)$, $y(t)$ bodu A, který je bodem rovinného silového pole, tvořeného dvěma Burgersovými články. Charakter zátěžné síly je totožný s předcházejícími případy (obr. 4.).

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \frac{F_0}{\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \left[\frac{\sin \alpha_1 \sin(\alpha_1 - \beta)}{c_{12}} + \right. \\
 & \left. + \frac{\sin \alpha_2 \sin(\alpha_2 - \beta)}{c_{11}} \right] \eta(t) + \frac{F_0}{\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \cdot
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \left[\frac{\sin \alpha_1 \sin(\alpha_1 - \beta)}{k_{12}} + \frac{\sin \alpha_2 \sin(\alpha_2 - \beta)}{k_{11}} \right] t + \\
 & + \frac{F_0}{\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \left[\frac{\sin \alpha_1 \sin(\alpha_1 - \beta)}{c_{22}} \left(1 - e^{-\frac{c_{22}}{k_{22}} t} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{\sin \alpha_2 \sin(\alpha_2 - \beta)}{c_{21}} \left(1 - e^{-\frac{c_{21}}{k_{21}} t} \right) \right] \\
 y(t) = & \frac{F_0}{\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \left[\frac{\cos \alpha_1 \sin(\beta - \alpha_1)}{c_{12}} + \right. \\
 & \left. + \frac{\cos \alpha_2 \sin(\beta - \alpha_2)}{c_{11}} \right] \eta(t) + \frac{F_0}{\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \cdot \\
 & \cdot \left[\frac{\cos \alpha_1 \sin(\beta - \alpha_1)}{k_{12}} + \frac{\cos \alpha_2 \sin(\beta - \alpha_2)}{k_{11}} \right] t + \\
 & + \frac{F_0}{\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \left[\frac{\cos \alpha_1 \sin(\beta - \alpha_1)}{c_{22}} \left(1 - e^{-\frac{c_{22}}{k_{22}} t} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{\cos \alpha_2 \sin(\beta - \alpha_2)}{c_{21}} \left(1 - e^{-\frac{c_{21}}{k_{21}} t} \right) \right] \quad (10)
 \end{aligned}$$

6. Vyšetření polohy hlavních os pružnosti a hlavních os tlumení pro posunutí u rovinného případu silového pole tvořeného viskoelastickými prvky.

- 6.1. Rovinné silové pole je tvořeno Maxwellovými články

Při výpočtu polohy hlavních os pružnosti pro posunutí vyjdeme ze vztahů (5)

$$x(t) = A_x \eta(t) + B_x t$$

$$y(t) = A_y \eta(t) + B_y t$$

Polohu hlavních os pružnosti pro posunutí nalezneme z podmínky, že vektor posunu $\vec{r}$ vyšetřovaného bodu A je kolmý na vektorem budící síly $\vec{F}$ (obr. 5).

Potom

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_y}{A_x} = \frac{a_{11} \sin \beta - a_{21} \cos \beta}{a_{22} \cos \beta - a_{12} \sin \beta} \stackrel{!}{=} \operatorname{tg} \beta \quad (11)$$

hodnoty koeficientů a_{ij} jsou dány vztahy

$$a_{11} = c_1 \cos^2 \alpha_1 + c_2 \cos^2 \alpha_2$$

$$a_{12} = c_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + c_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2$$

$$a_{21} = a_{12}$$

$$a_{22} = c_1 \sin^2 \alpha_1 + c_2 \sin^2 \alpha_2$$

Pro výpočet hledaného $\operatorname{tg} \beta$ obdržíme kvadratickou rovnici, která má řešení

$$\operatorname{tg} \beta_{1,2} = \frac{a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4 a_{12} a_{21}}}{2 a_{12}} \quad (12)$$

Podmínka kolmosti hlavních os pružnosti po posunutí je vyjádřena vztahem

$$\operatorname{tg} \beta_1 = - \cotg \beta_2$$

Tato podmínka vede po dosazení z rovnice (12) na výraz

$$a_{12} a_{21} = a_{12}^2, \quad ,$$

který je s ohledem na platnost zákonů vzájemnosti vždy splněn. Proto jsou hlavní osy pružnosti navzájem kolmé.

Výpočet polohy hlavních os tlumení je analogický vyšetření polohy hlavních os pružnosti. V první fázi řešení, t.j. v čase $t = 0^+$ zaujme vyšetřovaný bod polohu, která odpovídá rovnovážné poloze silového pole vytvořeného pouze nehmotnými

pružinami bezprostředně po připojení zátěžné síly $\vec{F}$ skoko-
vého průběhu. Tato poloha je vyjádřena prvními členy v rovni-
cích (5), tlumiče se v této fázi řešení neuplatní.

Ve druhé fázi řešení, časově navazující na první fázi,
působí na každý tlumič síla, odpovídající deformaci pružiny,
se kterou je tlumič seriově spojen. Trajektorie, která odpo-
ovídá druhé fázi řešení je popsána výrazy $B_x.t$ resp. $B_y.t$
v rovnicích (5). Poloha hlavních os tlumení je vyšetřena z
podmínky, že vektor rychlosti vyšetřovaného bodu A, $\vec{v}_A$,
odpovídající začátku druhé fáze řešení je kolineární s vektor-
em zátěžné síly $\vec{F}_x$ (obr. 5).

Velikost úhlu γ , který svírá vektor rychlosti $\vec{v}_A$ s
kladným směrem osy x je určena výrazem

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{B_y}{B_x} = \frac{b_{11} \sin \beta - b_{12} \cos \beta}{b_{22} \cos \beta - b_{12} \sin \beta} \stackrel{!}{=} \operatorname{tg} \beta' \quad (13)$$

hodnoty koeficientů b_{1j} jsou rovny

$$b_{11} = k_1 \cos^2 \alpha_1 + k_2 \cos^2 \alpha_2$$

$$b_{12} = k_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + k_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 = b_{21}$$

$$b_{22} = k_1 \sin^2 \alpha_1 + k_2 \sin^2 \alpha_2$$

Hledaný úhel β' , který určuje směr vektoru budící síly
 $\vec{F}$, vyhovující poloze hlavních os tlumení určíme ze vztahu

$$\operatorname{tg} \beta'_{1,2} = \frac{b_{22} - b_{11} \pm \sqrt{(b_{11} - b_{22})^2 + 4b_{12}^2}}{2 b_{12}} \quad (14)$$

Podmínka kolmosti hlavních os tlumení

$$\operatorname{tg} \beta'_1 = - \cotg \beta'_2$$

je opět splněna. Porovnáním vztahů pro $\operatorname{tg} \beta$ (12) a $\operatorname{tg} \beta'$ (14)
je zřejmé, že hlavní osy pružnosti a tlumení splynou v přípa-
dě, když konstanty tlumení k_1 a příslušné konstanty tuhos-
ti c_1 budou lineárně závislé.

$$k_1 = \alpha c_1 \quad \text{kde} \quad \alpha = \text{konst.}$$

6.2. Silové pole je tvořeno viskoelastickými články

2. typu

U tohoto typu silového pole, kde jsou viskoelastické články tvořeny seriovým spojením tlumicí a Kelvin-Voigtova článku existují pouze hlavní osy tlumení. Jejich polohu vyšetříme z podmínky, že rychlost vyšetřovaného bodu A, $\vec{v}_A$ je kolineární s vektorem zátěžné síly $\vec{F}$. O síle $\vec{F}$ opět předpokládáme, že se v čase $t = 0^+$ mění skokem z nulové hodnoty na hodnotu F_0 , přičemž vektor budicí síly svírá s kladným směrem osy x úhel β (obr. 6).

Pružiny z Kelvin-Voigtových článků neovlivní na začátku pohybu, t.j. v čase $t = 0^+$ okamžitou velikost rychlosti vyšetřovaného bodu. Polohu hlavních os tlumení vypočteme z rovnice

$$\tan \theta' = \frac{b_{11} \sin \beta - b_{12} \cos \beta}{b_{22} \cos \beta - b_{12} \sin \beta} = \frac{1}{\tan \beta'} \quad (15)$$

Velikosti konstant b_{ij} jsou určeny vztahy

$$b_{11} = k_{1\ell} \cos^2 \alpha_1 + k_{2\ell} \cos^2 \alpha_2$$

$$b_{12} = b_{21} = k_{1\ell} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + k_{2\ell} \sin \alpha_2 \cos \alpha_2$$

$$b_{22} = k_{1\ell} \sin^2 \alpha_1 + k_{2\ell} \sin^2 \alpha_2$$

kde

$$\frac{1}{k_{1\ell}} = \frac{1}{k_{11}} + \frac{1}{k_{21}} \quad ; \quad \frac{1}{k_{2\ell}} = \frac{1}{k_{12}} + \frac{1}{k_{22}}$$

Opět je splněna podmínka, že hlavní osy tlumení jsou navzájem kolmé (v čase $t = 0^+$).

7. Závěr

Referát podává analytické řešení rovinného případu silového pole, které je tvořeno viskoelastickými články. Použitím Laplaceovy transformace byla vyšetřena odezva pole na skokový průběh budicí síly. Použitím zákona superpozice je

možno stanovit odezvu silového pole na skokový průběh budicí síly v případech, kdy jsou pružicí jednotky tvořeny řetězcem viskoelastických článků.

V závěru referátu byly u vybraných případů rovinného silového pole tvořeného viskoelastickými články vyšetřeny polohy hlavních os pružnosti a tlumení.

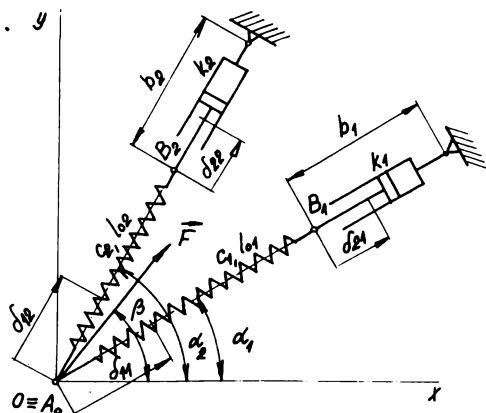
Seznam vyobrazení

1. Rovinný případ silového pole tvořeného Maxwellovými články
2. Rovinný případ silového pole tvořeného viskoelastickými články 2. typu
3. Realizace modelu standartního tělesa rovinným silovým polem, vytvořeným pomocí viskoelastických článků
4. Rovinný případ silového pole vytvořeného Burgersovými viskoelastickými články
5. Vyšetření polohy hlavních os pružnosti a tlumení. Rovinné silové pole je tvořeno Maxwellovými články.
6. Vyšetření polohy hlavních os pružnosti a tlumení. Silové pole je vytvořeno viskoelastickými články 2. typu.

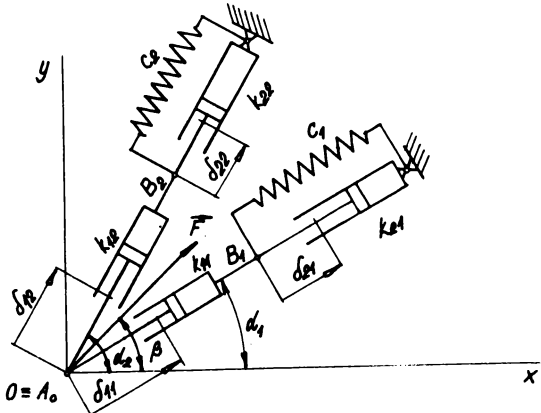
Seznam literatury

- [1] Angot A. : Užitá matematika pro elektrotechnické inženýry. SNTL, Praha 1971
- [2] Brát V., Brousil J.: Dynamika. SNTL, Praha 1967
- [3] Brepta R., Prokopec M. : Šíření napěťových vln a rázy v tělesech. Academia, Praha, 1972
- [4] Frazer R.A., Duncan W.J., Collar A.J. : Základy matisového počtu. CNTL, Praha, 1958
- [5] Kožešník J.: Dynamika strojů. SNTL, Praha 1958
- [6] Půst L., Lada M. : Pružné ukládání strojů. SNTL, Praha, 1965
- [7] Timošenko Š. : Kmitání ve strojnictví. SNTL, Praha, 1960
- [8] Harris C.M., Crede Ch.E. : Stock and vibration handbook. Mc Graw Hill book company, INC. , New York 1961, sv. 1.

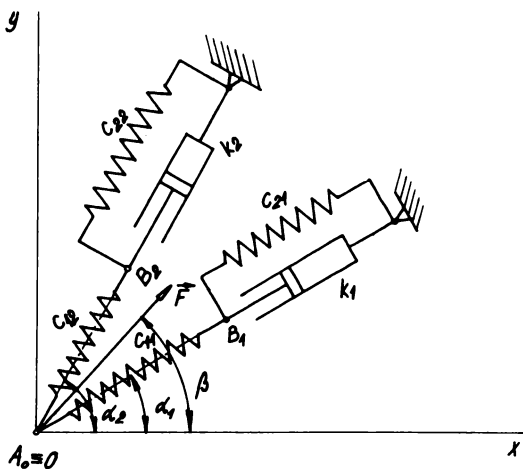
Obr. 1 - Rovinný případ silového pole tvořeného Maxwellovými články.



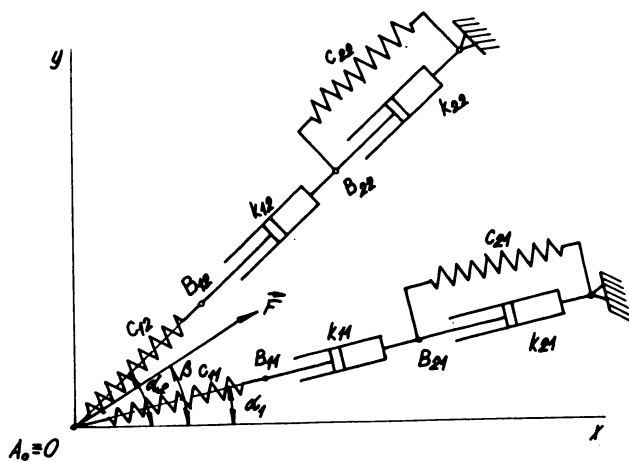
Obr. 2 - Rovinný případ silového pole tvořeného viskoelastickými články 2. typu



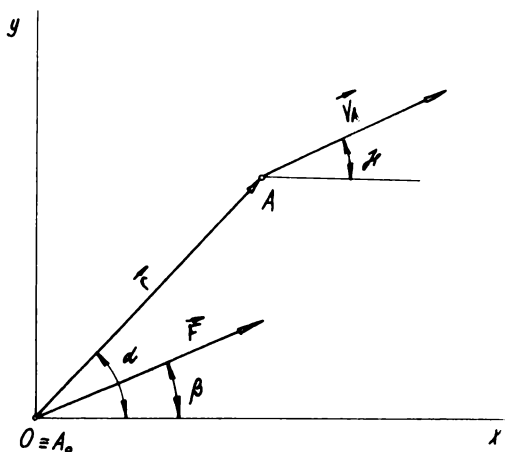
Obr. 3 - Realizace modelu standartního tělesa rovinným silovým polem, vytvořeným pomocí viskoelastických článků.



Obr. 4 - Rovinný případ silového pole vytvořeného Burgersovými viskoelastickými články



Obr. 5 - Vyšetření polohy hlavních os pružnosti a tlumení.
 Rovinné silové pole je tvořeno Maxwellovými články.



Obr. 6 - Vyšetření polohy hlavních os pružnosti a tlumení.
 Silové pole je vytvořeno viskoelastickými články 2. typu.

