

KROUCENÍ PRUTOV PROMĚNNÉHO ROTAČNÍHO PRŮŘEZU,
ANALÝZA ELEKTROANALOGOVOU SIMULACÍ

Doc.Ing. Václav Hájek,CSc – Ing. Květa Klepáčová,CSc
ČVUT, Fakulta stavební, katedra stavební mechaniky

ELEKTROANALOGOVÁ SIMULACE KROUCENÍ PRUTU PROMĚNNÉHO ROTAČNÍHO PRŮREZU

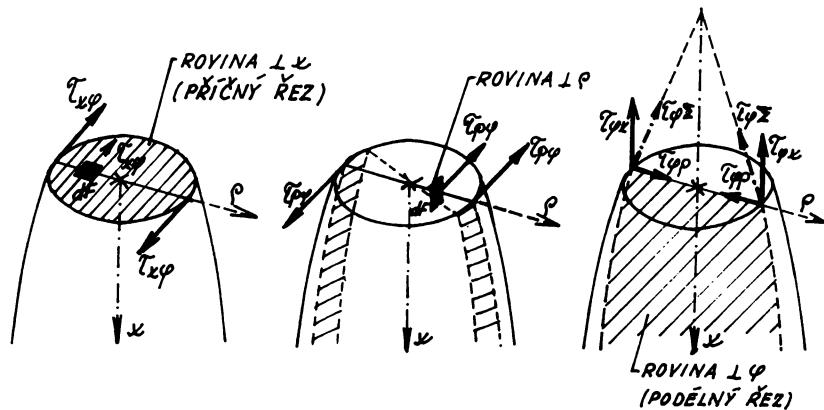
Stanovení smykových napětí a zejména pak koncentrace smykových napětí na prutu proměnného rotačního průřezu, zatíženém kroužicími momenty, představuje řešení parciální diferenciální rovnice s nekonstantními koeficienty.

Bautz a Thum předložili návrh elektroanalogové simulace elektrolytickou vanou a využili tohoto řešení v mnoha konkrétních případech. V předcházejících pracech jsme upozornili na některé principielní příčiny nepřesnosti řešení a navrhli modifikaci Bautz - Thumovy vany, podstatně zpřesňující řešení /1/, /5/, /6/.

Nahrazením elektrovodivého prostředí o proměnné vodivosti soustavou koncentrovaných odporů docházíme k elektroanalogové odpорové síti, umožňující dosáhnout nejen řádového zvýšení přesnosti oproti Bautze - Thumově elektrolytické vaně i její zpřesňující modifikaci, ale umožňující automatizaci proměřování pomocí standartních měřicích ústředen. Jednoduchost simulační odporevé sítě, jednoduchost obsluhy, tj. nastavení oblasti i jejího proměření s použitím běžných zařízení tenzometrických laboratoří, i bezporuchovost zařízení, ve svých důsledcích představuje velmi efektivní cestu řešení.

Smyková napětí $\tau_{x\psi}$ a $\tau_{\varphi\varphi}$ neprizmatického prutu kruhového průřezu lze vyjádřit jako derivace funkce potenciálu s mykových napětí :

$$\tau_{x\psi} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial F}{\partial \rho}, \quad \tau_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial F}{\partial x}; \quad (1)$$



Obr. 1. Smyková napětí v řezech kolmých na osu x , ρ , φ .

Dosadíme-li za složky napětí do rovnice kompatibility :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau_{\psi\psi}}{\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\tau_{x\psi}}{\rho} \right) = 0 \quad . \quad (2)$$

dostáváme pro funkci potenciálu s mykových napětí rovnici :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial F}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial F}{\partial \rho} \right) = 0 \quad (3)$$

Okrajová podmínka psaná pro obecný bod obrysů hřídele :

$$\left(\frac{\tau_{\psi\psi}}{\tau_{\psi\chi}} \right)_c = \frac{d f_c}{dx} \quad (4)$$

odkud pro funkci potenciálu s mykových napětí podél okraje

dostáváme :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial s} \right)_c = 0 \quad (5)$$

Na ose prutu je nejen $\tau_{x\varphi} = 0$, ale i $\tau_{\varphi\varphi} = 0$; proto

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) = 0 \quad a \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = 0 \Rightarrow F_0 = \text{konst} = k_0 \quad (5')$$

V příčných řezech, dostatečně vzdálených od míst změny momentu setrvačnosti, je $\tau_{\varphi\varphi} = 0$; proto

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial F}{\partial n} = 0 \quad (5'')$$

Elektroanalogovým modelem kroucené tyče proměnného průřezu může být podle Bautze-Thuma elektrolytická vana proměnné hloubky, ve které pole elektrického potenciálu lze vystihnout rovnici /3/

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\tilde{\sigma}_{(x,y)} \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\tilde{\sigma}_{(x,y)} \frac{\partial V}{\partial y} \right] = -q \quad (6)$$

kde V je elektrický potenciál obecného bodu v rovině xy ,

$\tilde{\sigma}_{(x,y)}$ je elektrická vodivost prostředí jako funkce polohy bodu,
 q je objemová proudová hustota vnitřních zdrojů

Při nulové objemové proudové hustotě vnitřních zdrojů elektrického proudu a při elektrické vodivosti

$$\tilde{\sigma}_{(x,y)} = \frac{1}{y^3} \quad (7)$$

dostáváme analogii mezi rovnicí (3) a rovnicí (6).

Splnění okrajových podmínek (5) dosáhneme umístěním elektrod podél obrysu, kde pak

$$V_c = \text{konst} = V_1 \quad (8)$$

takže dojde v analogii ke splnění vztahu (5) formou :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_c = 0$$

Rovněž podmínka (5') bude splněna, umístíme-li elektrodu podél osy (bod $\varphi = 0$) a připojíme k ní elektrický potenciál

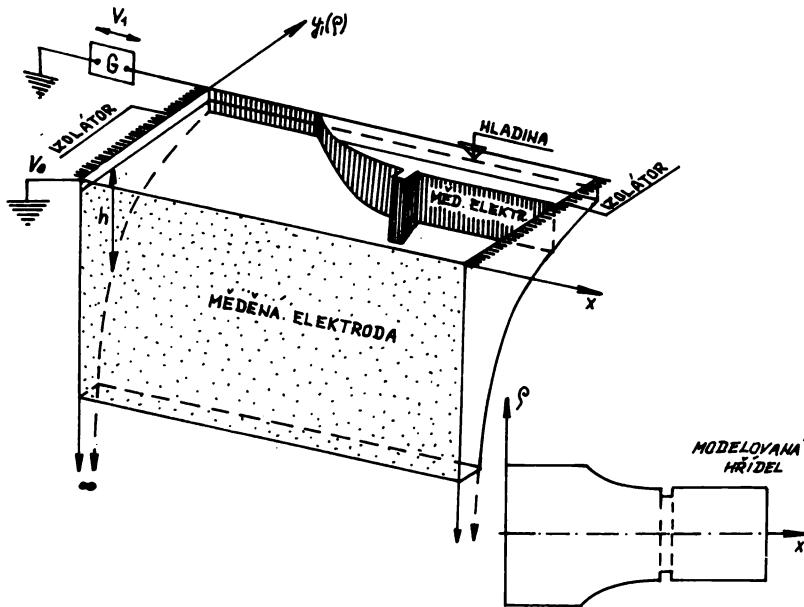
$V_0 = k_0 \cdot V$ bodech obou příčných řezů, omezujících vyšetřovanou oblast, splníme podmínky (5") umístěním izolátoru. Pak

$$J_n = c \cdot \frac{\partial V}{\partial n} = 0$$

Protože obecně nelze ovlivňovat měrnou vodivost elektrolytu, byla navržena dle Bautze-Thuma vana proměnné hloubky $h(y)$ dle vztahu

$$h(y) = \frac{1}{G_0 y^3} \quad (9)$$

kde G_0 je konstantní vodivost elektrolytu vany.

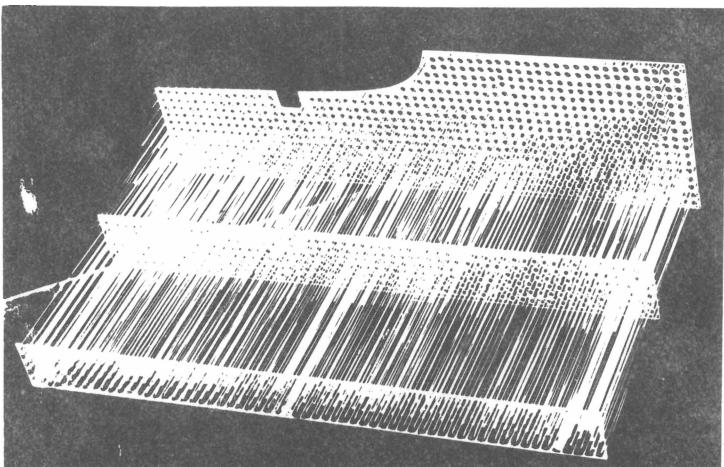


Obr. 2. Elektrolytická vana dle Bautze-Thuma

Uvedeným typem elektrolytické vany (viz /4/, /2/) byla řešena řada úloh, především koncentrace smykových napětí v okolí,

vrubů, zápichů, náhlých i spojitéh změn příčného průřezu.

V našich předcházejících pracech /1/, /6/, /5/ bylo upozorněno na značné nepřesnosti výše uvedené simulace, byla analyzována příčina - spočívající v nesplnění podmínky $\frac{\partial V}{\partial z} = \text{konst}$ v obecném bodě elektrolytické vany - a navrženo technické provedení zpřesňujících úprav (viz obr.3) s příslušnou ověřující dokumentací výsledků měření /6/.



Obr. 3. Systém navržených prutových elektrod pro zpřesnění simulace kroucení Bautz-Thumovou elektrolytickou vanou

V této práci bychom Vás chtěli seznámit s možností simulace kroucení rotačních prutů proměnného průřezu cestou elektroanalogové odporové sítě.

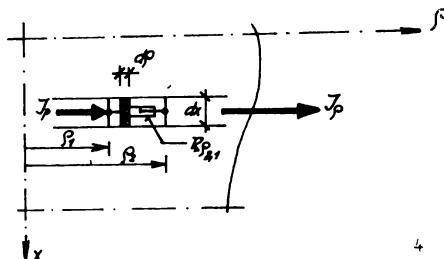
Vodivost elementu elektrolytické vany nahradíme koncentrovanou vodivostí, jejíž velikost bude funkcí jak polohy elementu, tak i základní koncepce elektrické sítě. Funkce potenciálu smykových napětí bude měřena v uzlech sítě, která může být navržena čtvercová, obdélná eventuelně se spojitě měnící se vzdáleností, umožňující zhuštění bodů v okolí obrysu prutu. Vzhledem k velmi jednoduchému systému základního zapojení může být sestaven analýzator s velmi rozsáhlým počtem prvků, takže lze velmi efektivně dosáhnout vysoké přesnosti a snadnými

úpravami obrysu pak i dosažení optimálního návrhu.

Elektrický odpor, který kladé procházejícímu proudu hranolek vodivého prostředí délky Δl , příčného průřezu S a měrné vodivosti $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_0$ je dán vztahem :

$$R = \frac{1}{\tilde{\sigma}} \cdot \frac{\Delta l}{S} \quad (10)$$

Pro vodivost proměnnou



$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(\rho) = \frac{1}{c' \rho^3} \quad (11)$$

kde c' je libovolná konstanta, je přírůstek odporu R_ρ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_\rho}{\partial \rho} \cdot d\rho &= \\ &= c' \rho^3 \frac{d\rho}{\Delta x \cdot \beta} \end{aligned} \quad (12)$$

Obr. 4. Nahrazení spojitého prostředí koncentrovanou vodivostí

kde β je výška hranolku, kterým prochází el.proud; je konstantní a může být

volena : uvažujeme pro jednoduchost $\beta = 1$.

Integrací vztahu (12) dostáváme :

$$R_{\rho_2} - R_{\rho_1} = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{c' \rho^3}{\Delta x} d\rho = \frac{c'}{4(\Delta x)} \cdot (\rho_2^4 - \rho_1^4) \quad (13')$$

a po úpravě :

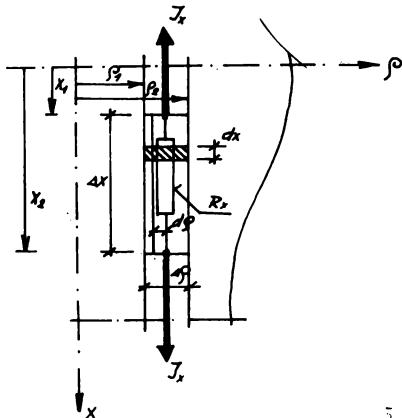
$$R_{\rho_{2,1}} = R_{\rho_2} - R_{\rho_1} = \frac{c'}{4} \frac{\Delta \rho}{\Delta x} (\rho_2^3 + \rho_2^2 \rho_1 + \rho_2 \rho_1^2 + \rho_1^3) \quad (13)$$

V pruhu šířky Δx mezi řezy ρ_1 a ρ_2 procházející složce proudu ve směru ρ (J_ρ) je kladen odpor $R_{\rho_{2,1}}$ o velikosti $(R_{\rho_2} - R_{\rho_1})$ dle vztahu (13').

Přírůstek odporu ve směru osy x , který odpovídá proužku šířky $d\rho$ je mezi řezy vzdálenými o Δx roven :

$$\frac{\partial r_x}{\partial x} dx = \frac{c' \rho^3}{\beta d\rho} dx \quad (14)$$

Po integraci dostaváme odpor proužku šířky $d\varrho$: $r_{x_{2,1}}$



Obr. 5. Nahrazení spojitého prostředí koncentrovanou vodivostí

$$A_{x_{2,1}}^{(\rho_2 - \rho_1)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{c'(x_2 - x_1)} \cdot \left(\frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_1^2} \right)$$

a výsledný odpor :

$$R_{x_{2,1}}^{(\rho_2 - \rho_1)} = 2c'(\Delta x) \frac{\rho_1^2 \rho_2^2}{\rho_2^2 - \rho_1^2} = 2c' \frac{\Delta x}{\Delta \rho} \frac{\rho_1^2 \rho_2^2}{\rho_2 + \rho_1} \quad (17)$$

Označíme-li pořadí (m) umístění odporu počínaje od osy hřídele (pro $\rho = 0$), dostaváme ze vztahů (13) a (17) pro odpory R_x a R_ρ (zavedeme-li dále $c' = 4c$) vzorce : (18)

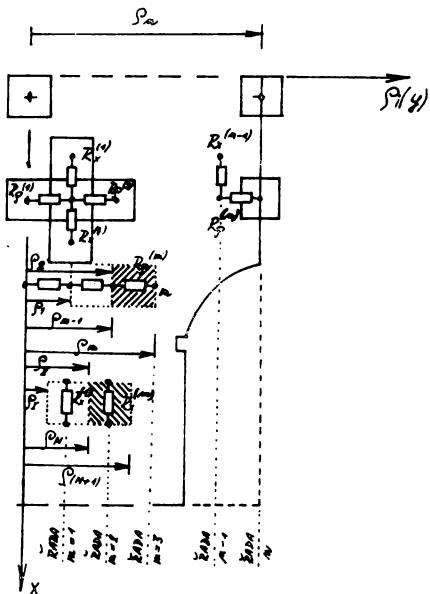
$$R_\rho^{(m)} = c \cdot \frac{(\Delta \rho)^4}{\Delta x} (4m^3 - 6m^2 + 4m - 1) \quad (19)$$

$$R_x^{(m)} = c \cdot \Delta x \cdot (\Delta \rho)^2 \cdot \frac{(4m^2 - 1)^2}{4m} \quad (20)$$

Vodivost proužku šířky $d\varrho$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{x_{2,1}}}{\partial \rho} d\rho &= \\ &= \frac{d\rho}{c' \rho^3 (x_2 - x_1)} \end{aligned} \quad (16)$$

Integrací vztahu (16) dostaváme pro vodivost pásu šířky ($\rho_2 - \rho_1$) výraz :



Obr. 6. Nahrazení spojitého prostředí elektroanalognou odporovou sítí.

V tabulce 1 (na následující stránce) je uveden návrh analogo-nu, členěnému ve směru φ na 50 diferenčních elementů $\Delta\varphi = \text{konst.}$

Vedle elektroanalogné odporeové sítě, pokrývající vyšetřovanou oblast diferenční sítí o stálé velikosti kroku $\Delta\varphi = \text{konst.}$, $\Delta x = \text{konst}$ (viz tabulka 1), se ukazuje vhodné proložit vyšetřovanou oblastí síť zhušťující se v místech pro nás nejzávažnějších - poblíž vnějšího okraje, tj. použijeme-li síť o měnícím se kroku ($\Delta\varphi$) = $f(\varphi)$. Podle funkční závislosti $f(\varphi)$ může být propočítána velká řada různých alternativ simulujících el. sítí.

Odvoďme elektroanalognou síť, u které budou všechny odpory ležící ve směru poloměru φ konstantní :

$$\parallel R_\varphi^{(i)} = \text{konst} = R_{\varphi\varphi} \quad (21)$$

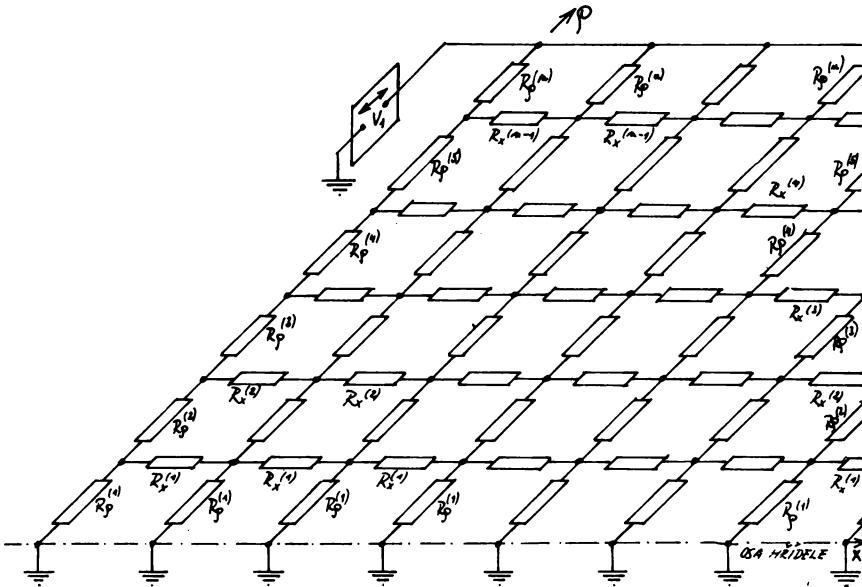
Tabulka 1.

m	$R_p^{(m)}$	$R_x^{(m)}$	m	$R_p^{(m)}$	$R_x^{(m)}$
1	1	2,25	26	66 351	70 252,009
2	15	28,125	27	74 465	78 678,009
3	65	102,083	28	83 215	87 752,008
4	175	248,063	29	92 625	97 498,008
5	369	490,05	30	102 719	107 940,-
6	671	852,042	31	113 521	119 102,-
7	1 105	1 358,036	32	125 055	131 008,-
8	1 695	2 032,031	33	137 345	143 682,-
9	2 465	2 898,028	34	150 415	157 148,-
10	3 439	3 980,025	35	164 289	171 430,-
11	4 641	5 302,023	36	178 991	186 552,-
12	6 095	6 888,0208	37	194 545	202 538,-
13	7 825	8 762,0192	38	210 975	219 412,-
14	9 855	10 948,017	39	228 305	237 198,-
15	12 209	13 470,016	40	246 559	255 920,-
16	14 911	16 352,015	41	265 761	275 602,-
17	17 985	19 618,014	42	285 935	296 268,-
18	21 455	23 292,013	43	307 105	317 942,-
19	25 345	27 398,013	44	329 295	340 648,-
20	29 679	31 960,012	45	352 529	364 410,-
21	34 481	37 002,011	46	376 831	389 252,-
22	39 775	42 548,011	47	402 225	415 198,-
23	45 585	48 622,010	48	428 735	442 272,-
24	51 935	55 248,01	49	456 385	470 498,-
25	58 849	62 450,01	50	485 199	----

Z výrazu (13') po úpravě a dosazení z (18) a (21) můžeme napsat :

$$R_p^{(m)} = (R_{pm} - R_{pm-1}) = \frac{C}{\Delta X} (\varphi_m^4 - \varphi_{m-1}^4) = R_{op} \quad (22)$$

Pro jednotlivé odpory $R_p^{(m)}$ postupně dostáváme (dle obr.6 - pro $\varphi_0 = 0$)



Obr. 7. Elektroanalogová odporová síť pro simulaci kroutení rotačních prutů proměnného průřezu

$$\left. \begin{aligned} R_p^{(1)} &= \frac{C}{\Delta x} (\rho_1^4 - 0) = R_{op} \\ R_p^{(2)} &= \frac{C}{\Delta x} (\rho_2^4 - \rho_1^4) = R_{op} \\ &\vdots \\ R_p^{(n)} &= \frac{C}{\Delta x} (\rho_n^4 - \rho_{n-1}^4) = R_{op} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Sečtením dostáváme :

$$\sum_{m=1}^{m=n} R_p^{(m)} = n \cdot R_{op} = \frac{C}{\Delta x} \cdot \rho_n^4 \Rightarrow \quad (24)$$

$$\Rightarrow \frac{C}{\Delta x} = R_{op} \frac{n}{\rho_n^4}$$

Po dosazení do vztahů (23) :

$$\frac{n}{\rho_n^4} \rho_1^4 = 1 \Rightarrow \rho_1 = \underline{\underline{\frac{\rho_n}{\sqrt[n]{n}}}} \quad (25)$$

$$\dots$$

$$\frac{n}{\rho_n^4} \rho_m^4 = m \Rightarrow \rho_m = \underline{\underline{\rho_n \sqrt[n]{\frac{m}{n}}}}$$

Diferenční krok ve směru poloměru :

$$\Delta \rho^{(m)} = \rho_m - \rho_{m-1} = \frac{\rho_n}{\sqrt{n}} (\sqrt{m} - \sqrt{m-1}) \quad (26)$$

Pro výpočet odporu ve směru osy x použijeme vztah (17) :

$$R_x^{(1)} = 8c \Delta x \cdot \frac{\rho_I^2 \cdot \rho_{II}^2}{\rho_I^2 - \rho_{II}^2} \quad ; \\ (\rho_I, \rho_{II} \text{ viz obr.6 - strana 7 })$$

obecně, pro odpor m-té řady po dosazení ze vztahu (24) :

$$R_x^{(m)} = 8 R_{op} \frac{n}{\rho_n^4} \cdot (\Delta x)^2 \cdot \frac{\rho_M^2 \cdot \rho_{M+1}^2}{\rho_{M+1}^2 - \rho_M^2} \quad (27)$$

kde

$$\rho_I = \rho_n \sqrt[4]{\frac{2 \times 1 - 1}{2n}} \quad \rho_{II} = \rho_n \sqrt[4]{\frac{2 \times 2 - 1}{2n}} \quad (\text{viz obr.6})$$

$$\rho_M = \rho_n \sqrt[4]{\frac{2m - 1}{2n}} \quad \rho_N = \rho_n \sqrt[4]{\frac{2n - 1}{2n}} \quad (28)$$

Po dosazení do (27) :

$$R_x^{(m)} = 8 R_{op} \frac{(\Delta x)^2}{\rho_n^2} \cdot \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2m+1} \cdot \sqrt{2m-1}}{\sqrt{2m+1} - \sqrt{2m-1}} \quad (29)$$

Označíme-li

$$8 R_{op} \cdot \frac{(\Delta x)^2}{\rho_n^2} \cdot \sqrt{\frac{n}{2}} = a \quad (30)$$

pak v tabulce 2 jsou uvedeny velikosti odporu ve směru osy pružtu $R_x^{(m)}$ (při $R_p^{(m)} = R_{op}$).

Označíme-li měřítko potenciálu funkce snykových napětí

$$F = x \cdot V \quad (31)$$

lze pak snyková napětí stanovit z hodnot elektrických potenciálů analogové odporové sítě s proměnným krokem ve směru poloměru ze vztahů (32) a (33) :

$$(r_{xp})_M^{[x_i = (i - \frac{1}{2}) \Delta x]} = \frac{x}{\rho_n^3} \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{n^3} [V_m^{(x_i)} - V_{m-1}^{(x_i)}]}{\sqrt{2m-1} (\sqrt{m} - \sqrt{m-1})} \quad (32)$$

$$(v_{ps})_m^{(x_i=i \Delta x)} = - \frac{\alpha}{\rho_n^2 \sqrt{\frac{m}{n}}} \frac{V_m^{(i+\frac{1}{2})\Delta x} - V_m^{(i-\frac{1}{2})\Delta x}}{(\Delta x)} \quad (33)$$

Tabulka 2

m	$R_x^{(m)}/a$	m	$R_x^{(m)}/a$	m	$R_x^{(m)}/a$	m	$R_x^{(m)}/a$	m	$R_x^{(m)}/a$
1	2,366 025	11	103,055 89	21	272,094 63	31	488,108 93	41	742,473 09
2	7,684 230	12	117,447 87	22	291,768 76	32	511,921 93	42	769,804 36
3	14,440 613	13	132,451 92	23	311,894 95	33	536,109 69	43	797,463 75
4	22,405 88	14	148,043 92	24	332,463 53	34	560,666 52	44	825,446 37
5	31,424 82	15	164,202 68	25	353,465 06	35	585,587 35	45	853,748 93
6	41,388 588	16	180,908 81	26	374,890 81	36	610,866 45	46	882,368 23
7	52,216 02	17	194,683 88	27	396,732 26	37	636,499 38	47	911,299 19
8	63,843 643	18	215,895 74	28	418,981 93	38	662,481 22	48	940,539 86
9	76,220 147	19	234,146 42	29	441,632 8	39	688,806 14	49	970,088 02
0	89,302 926	20	252,883 28	30	464,677 41	40	715,471 75	50	999,942 99

Pro síť se stálou velikostí kroků ($\Delta \varphi$)^(m) = konst. a (Δx) = konst lze provést výpočet napětí a přírůstků potenciálů a příslušného poloměru ϱ zcela bezprostředně, (vztahy (32) a (33) se týkají pouze sítě s proměnnou velikostí kroku).

Měřítko λ potenciálu smykových napětí a analogické veličiny - elektrického potenciálu stanovíme ze zadáné velikosti kroužícího momentu K :

$$\begin{aligned} K &= \int_S \tau_{x\varphi} \cdot \varrho dS = 2 \int_0^{\pi} \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial \varrho} \cdot \varrho \cdot \varrho d\varphi d\varrho = \\ &= 2\pi \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \frac{\partial F}{\partial \varrho} d\varrho = 2\pi (F_{\varrho_1} - F_{\varrho_0}) \end{aligned} \quad (34)$$

Po dosazení za funkci potenciálu smykových napětí na okrajích oblasti :

$$K = 2\pi (\lambda V_1 - \lambda V_0)$$

odkud pro měřítko λ dostáváme závislost :

$$\lambda = \frac{K}{2\pi (V_1 - V_0)} \quad (35)$$

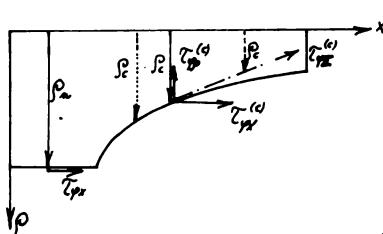
kde K je zadaný kroutící moment /kN·m/

V_1 je elektrický potenciál elektrody, umístěné podél vnějšího okraje / V /

V_o je elektrický potenciál elektrody podél osy prutu (evenuelně vnitřního okraje) / V /

ϱ je měřítka (rozměr /kN m V⁻¹ /, nezávislé na parametrech elektroanalognové sítě).

Součinitel koncentrace smykových napětí k na vnějším okraji prutu je dán poměrem :



$$k = - \frac{\tau_{\varphi\Sigma}^{(c)}}{\tau_{\varphi\Sigma}^{(c=n)}} = \\ = \frac{\sqrt{\tau_{\varphi x}^{(c)} + \tau_{\varphi\varphi}^{(c)}^2}}{\tau_{\varphi x}^{(n)}} \quad (36)$$

$$\text{kde } \tau_{\varphi\Sigma}^{(n)} = \tau_{\varphi x}^{(n)}$$

$\tau_{\varphi\Sigma}^{(c)}$ je výslednicí napětí $\tau_{\varphi x}$ a $\tau_{\varphi\varphi}$ v bodě c okraje.

Obr.8. Smykové napětí na vnějším okraji

Po dosazení dostáváme :

$$k = \frac{\varrho_n^2}{\varrho_c^2} \cdot \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)_c}{\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)_n} \quad (37)$$

kde $\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)_c$ je gradient el.potenciálu v bodě c okraje.

Na základě předběžných měření přesnost ve stanovení smykových napětí a jejich průběhu pomocí elektroanalognové odpovorové sítě je nejen řádově přesnější než při jejich stanovení použitím Bautz-Thumovy elektrolytické vany, i zpřesněné o systém prutových elektrod, ale umožnuje automatizaci proměřování a vyhodnocování naměřených dat. Ověření bylo uskutečněno na odpovědném řetězci o 50 diferenčních krocích stálé velikosti ve směru ϱ .

Elektroanalognová odpovorová síť dává velmi efektivní analyzu

kroucených tyčí proměnného průřezu; realizace simulujícího zařízení je velmi jednoduchá s možností využití standartních ústředen pro libovolné snímání dat i následné vyhodnocení.

L I T E R A T U R A

- / 1 / Hájek : Elektromatické modelování kroucení prutů proměnného průřezu.
Acta Polytechnica, I, 2, str. 15-25, Praha 1967.
- / 2 / Hájek : Okrajové úlohy teorie pružnosti a termoelasticity, Analysa analogovou a kvazianalogovou sítí.
Rozpravy ČSAV, Praha 1970, roč.80, seš.2.
- / 3 / Hájek - Antropius - Klepáčová - Matyáš - Petrovičová : Experimentální metody ve stavební mechanice.
Vydavatelství ČVUT 1973 (skriptum).
- / 4 / Hetényi : Príručka experimentálnej pružnosti,
SNTL, Bratislava 1961.
- / 5 / Klepáčová :
Ověřující měření zpřesňující modifikace
Beutz-Thumovy analogie; Problematika síťového
modelu.
Zpráva státního úkolu III-6-1/3 , Praha 1971.
- / 6 / Klepáčová :
Elektromatické modelování kroucení prutů
proměnného průřezu.
Sborník ICEM 1972.